2-я олимпиада Мегаполисов

День 2

Задача 1. Найдите максимальное натуральное число N, для которого из множества $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ можно выбрать N различных чисел так, что ни сумма, ни произведение никаких двух различных выбранных чисел не делятся на 100.

(Mikhail Evdokimov)

Ответ: 45.

Оценка. Разобьем числа на 46 групп: первая группа — это все числа, делящиеся на 10 (10, 20, ..., 100), а остальные 45 групп — это пары оставшихся чисел, в сумме дающих 100 (1 и 99, 2 и 98, ..., 9 и 91, 11 и 89, ..., 49 и 51). Из каждой группы можно выбрать не более одного числа, так как числа в парах в сумме дают 100, а любые два числа из первой группы при перемножении делятся на 100. Кроме того, нельзя одновременно выбрать по числу из пар (4, 96) и (25, 75), так как произведение этих двух чисел будет кратно 100. Таким образом, можно выбрать не более 45 чисел.

Пример. Рассмотрим все числа от 1 до 49, за исключением 20, 25, 30, 40. Докажем, что этот набор чисел удовлетворяет всем условиям.

Очевидно, что все попарные суммы выбранных чисел не превосходят 97, а значит, не могут делиться на 100.

Предположим, что произведение каких-то двух чисел кратно 100. Заметим, что никакое из выбранных чисел не кратно 25, а значит, оба множителя должны делиться на 5. Но все выбранные кратные 5 числа, кроме числа 10, нечетны, а 10 не кратно 4. Тогда произведение любых двух кратных 5 выбранных чисел не делится на 4 и, следовательно, не делится на 100. Противоречие. □

Задача 2. Натуральные числа x и y, большие 1, таковы, что

$$[x+2, y+2] - [x+1, y+1] = [x+1, y+1] - [x, y]\,.$$

Докажите, что одно из чисел x и y делится на другое.

(Здесь через $[a, b]$ обозначается наименьшее общее кратное чисел a и b.)

(Dušan Djukić)

Если $x = y$, то $(x, y) = x$, $(x+1, y+1) = x+1$, $(x+2, y+2) = x+2$, поэтому требуемое равенство верно. Теперь без ограничения общности можем считать, что $x < y$.

Заметим, что для любых двух натуральных чисел m и n выполнено $[m, n] = cy$, где $c = m/(m, n)$ — натуральный делитель a (как обычно, (m, n) обозначает наибольший общий делитель m и n). Таким образом, из $[x, y] +$

$[x+2, y+2] = 2[x+1, y+1]$ получаем

$$ay + c(y+2) = 2(y+1)b\,, \tag{1}$$

где

$$a = \frac{x}{(x,y)}\,, \quad b = \frac{x+1}{(x+1, y+1)}\,, \quad c = \frac{x+2}{(x+2, y+2)}\,. \tag{2}$$

В частности,

$$a \mid x\,, \quad b \mid (x+1)\,, \tag{3}$$

$$1 \leqslant a \leqslant x < y+1\,, \quad 1 \leqslant c \leqslant x+2 \leqslant y+1\,. \tag{4}$$

Далее из (1) получаем $c - a = (2b - a - c)(y+1)$, отсюда $(y+1) \mid (c-a)$. Из (4): $|c-a| < y+1$, поэтому $c - a = 0$, $a = c$. Подставим $c = a$ в (1) и получим $b = a$. Но из (3), $a \mid x$ и $a \mid (x+1)$, поэтому $a = b = 1$.

Подставив $a = 1$ в (2), получим $x = (x, y)$, поэтому $x \mid y$. $\square$

Задача 3. Выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ таков, что в него можно вписать окружность и вокруг него можно описать окружность. Пусть ω_A, ω_B, ω_C, ω_D, ω_E и ω_F — окружности, вписанные в треугольники FAB, ABC, BCD, CDE, DEF и EFA соответственно. Обозначим общую внешнюю касательную к окружностям ω_A и ω_B, отличную от прямой AB, через ℓ_{AB}. Аналогично определим прямые ℓ_{BC}, ℓ_{CD}, ℓ_{DE}, ℓ_{EF} и ℓ_{FA}. Пусть A_1 — точка пересечения прямых ℓ_{AB} и ℓ_{FA}; B_1 — точка пересечения прямых ℓ_{BC} и ℓ_{AB}; точки C_1, D_1, E_1 и F_1 определяются аналогично.

Известно, что $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — выпуклый шестиугольник. Докажите, что его диагонали A_1D_1, B_1E_1 и C_1F_1 пересекаются в одной точке. *(Nairi Sedrakyan)*

Решение 1.

Мы докажем, что шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ центрально симметричен — а значит, его главные диагонали A_1D_1, B_1E_1 и C_1F_1 пересекаются в центре симметрии.

Обозначим через I_A, I_B, I_C, I_D, I_E и I_F центры окружностей ω_A, ω_B, ω_C, ω_D, ω_E и ω_F соответственно.

Утверждение 1. $\ell_{AB} \parallel CF \parallel \ell_{DE}$, $\ell_{BC} \parallel AD \parallel \ell_{EF}$, and $\ell_{CD} \parallel BE \parallel \ell_{FA}$.

Доказательство. Из симметрии, достаточно доказать, что $\ell_{AB} \parallel CF$. Пусть M — середина дуги AB описанной окружности, не содержащей точек C и F, а m — касательная к этой окружности в точке M (тогда $m \parallel AB$, рис. 1). Тогда

$$\angle(FM, CF) = \angle(m, CM) = \angle(AB, CM)\,. \tag{5}$$

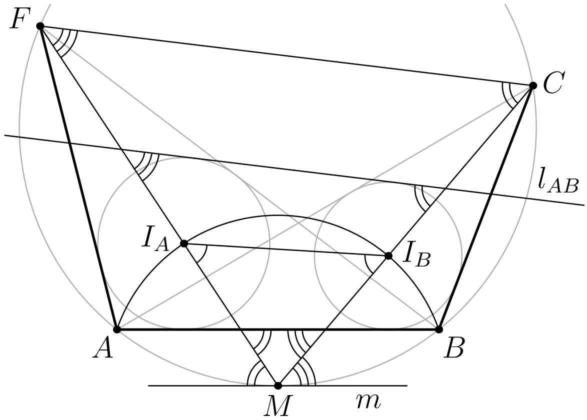

Рис. 1: решение 1 задачи 6.

Хорошо известно, что в треугольнике FAB точка M равноудалена от A, B и I_A; аналогично, $MI_B = MA = MB$. Значит, $MI_A = MI_B$, откуда $\angle(I_AI_B, CM) = \angle(FM, I_AI_B)$. Поскольку прямые AB и ℓ_{AB} симметричны относительно I_AI_B, имеем

$$\begin{aligned}\angle(AB, CM) &= \angle(AB, I_AI_B) + \angle(I_AI_B, CM) = \\ &= \angle(I_AI_B, \ell_{AB}) + \angle(FM, I_AI_B) = \angle(FM, \ell_{AB})\,.\end{aligned}$$

Ввиду (5), из этого равенства следует, что $\angle(FM, CF) = \angle(FM, \ell_{AB})$, то есть $CF \parallel \ell_{AB}$. □

Утверждение 2. $A_1B_1 + C_1D_1 + E_1F_1 = B_1C_1 + D_1E_1 + F_1A_1$.

Доказательство. Пусть ω_A касается прямых AB, FA, ℓ_{AB} и ℓ_{FA} в точках T_A, U_A, V_A и W_A соответственно. Определим точки $T_B, \ldots, W_F$ аналогично (рис. 2). Так как шестиугольник $ABCDEF$ описан, имеем

$$AB + CD + EF = BC + DE + FA. \tag{6}$$

Далее,

$$AT_A = AU_A,\ \ldots,\ FT_F = FU_F \quad \text{и} \quad A_1V_A = A_1W_A,\ \ldots,\ F_1V_F = F_1W_F, \tag{7}$$

поскольку это пары отрезков кавательных к окружностям $\omega_A, \ldots, \omega_F$.

Наконец, из симметрии относительно I_AI_B, ..., I_FI_A, мы получаем, что

$$T_AU_B = V_AW_B,\ \ldots,\ T_FU_A = V_FW_A. \tag{8}$$

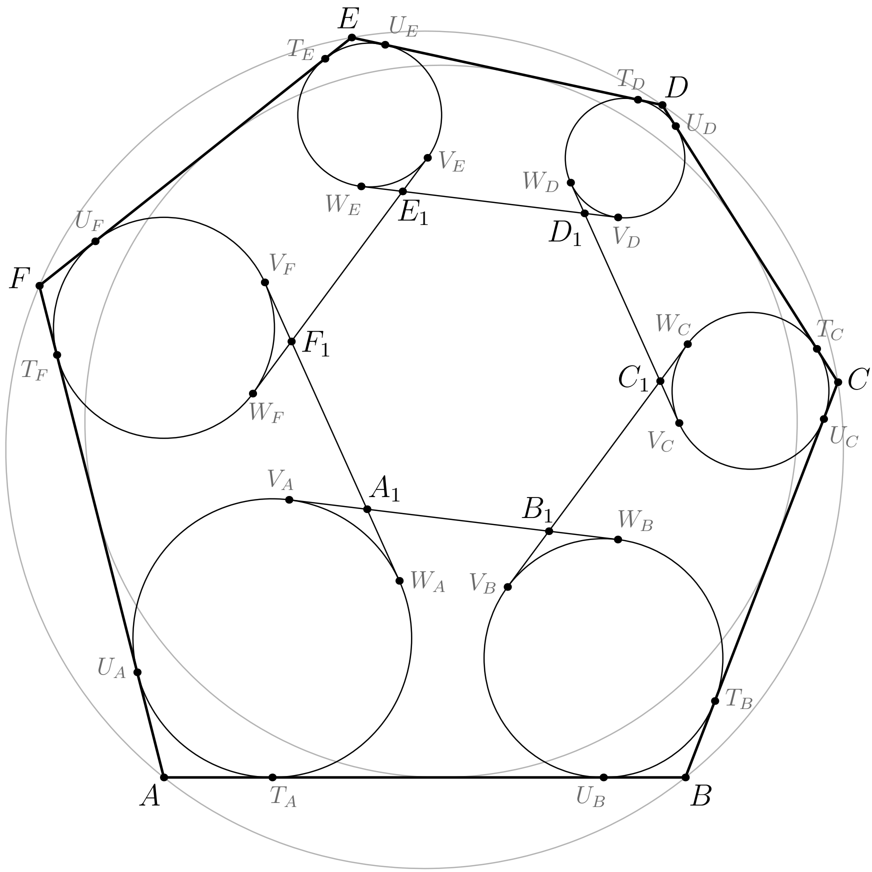

Рис. 2: решение 1 задачи 6.

Из равенств (7) и (8) получаем, что

$$\begin{aligned} A_1B_1 &= V_AW_B - A_1V_A - B_1W_B = T_AU_B - A_1V_A - B_1W_B = \\ &= (AB - AT_A - BU_B) - A_1V_A - B_1W_B = \\ &= AB - AT_A - BT_B - A_1V_A - B_1V_B\,. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} B_1C_1 &= BC - BT_B - CT_C - B_1V_B - C_1V_C\,, \\ &\dots \\ F_1A_1 &= FA - FT_F - AT_A - F_1V_F - A_1V_A\,. \end{aligned}$$

Подставляя эти формулы в (6) и сокращая одинаковые члены, получаем требуемое равенство. □

Утверждение 3. $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{E_1D_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{F_1E_1}$ и $\overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{A_1F_1}$.

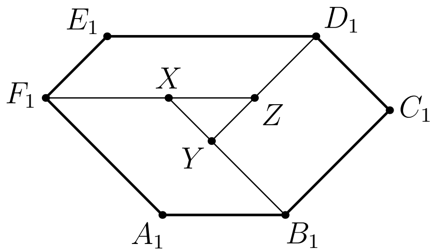

Рис. 3: решение 1 задачи 6.

Доказательство. Выберем точки X, Y и Z так, что $F_1A_1B_1X$, $B_1C_1D_1Y$ и $D_1E_1F_1Z$ — параллелограммы (рис. 3). Из утверждения 1 получем, что $F_1X \parallel A_1B_1 \parallel E_1D_1 \parallel F_1Z$, то есть точки F_1, X, Z лежат на одной прямой. Аналогично, точки B_1, X, Y лежат на одной прямой, равно как и точки D_1, Y, Z. Мы докажем, что точки X, Y, Z совпадают.

Если точки X, Y, Z не совпадают, то они образуют треугольник. Предположим, что этот треугольник XYZ имеет ту же ориентацию, что и шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Тогда

$$F_1A_1 + B_1C_1 + D_1E_1 = XB_1 + YD_1 + ZF_1 > \\ > YB_1 + ZD_1 + XF_1 = C_1D_1 + E_1F_1 + A_1B_1\,,$$

что противоречит утверждению 2.

Если ориентация треугольника XYZ противоположна ориентации шестиугольника, то аналогично получается неравенство $F_1A_1 + B_1C_1 + D_1E_1 < C_1D_1 + E_1F_1 + A_1B_1$, которое также невозможно. □

Утверждение 3 показывает, что шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ действительно центрально симметричен, что и требовалось. □

Решение 2.

Покажем, как после доказательства утверждения 1 можно завершить решение по-другому. Пусть I — центр окружности, вписанной в $ABCDEF$.

Утверждение 4. $II_A \cdot IA = II_B \cdot IB = II_C \cdot IC = II_D \cdot ID = II_E \cdot IE = II_F \cdot IF$.

Доказательство. Опять обозначим через M середину дуги AB описанной окружности, не содержащей точку C. Как уже отмечалось в доказательстве утверждения 1, точки A, B, I_A и I_B лежат на окружности

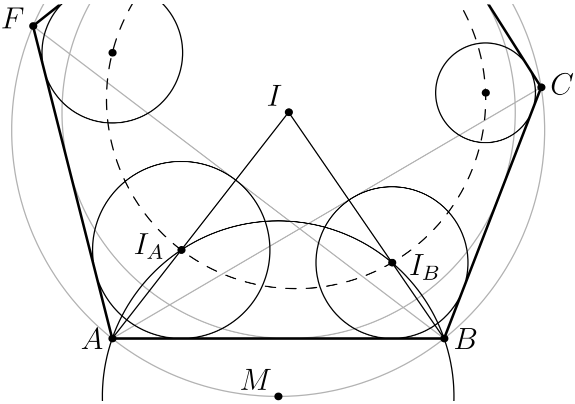

Рис. 4: решение 2 задачи 6.

с центром M (рис. 4). Поскольку AI_A и BI_B — биссектрисы углов FAB и ABC, они пересекаются в I. Значит, $II_A \cdot IA = II_B \cdot IB$ есть просто степень точки I относительно упомянутой окружности. Остальные равенства доказываются аналогично. □

Утверждение 4 показывает, что инверсия f с центром I и радиусом $\rho = \sqrt{II_A \cdot IA}$ переводит точки $A, \ldots, F$ в точки $I_A, \ldots, I_F$ соответственно. Значит, шестиугольник $I_AI_BI_CI_DI_EI_F$ вписан.

Известно, что главные диагонали вписанного выпуклого шестиугольника $X_1X_2X_3X_4X_5X_6$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $X_1X_2 \cdot X_3X_4 \cdot X_5X_6 = X_4X_5 \cdot X_6X_1 \cdot X_2X_3$ (это следует из тригонометрической теоремы Чевы для треугольника $X_1X_3X_5$). Поэтому, поскольку шестиугольник $ABCDEF$ одновременно вписан и описан, из теоремы Брианшона получаем, что его диагонали пересекаются в одной точке и что

$$AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA\,. \tag{9}$$

С другой стороны, из инверсии f получаем, что

$$AB = I_AI_B \cdot \frac{IA \cdot IB}{\rho^2}\,, \quad \ldots, \quad FA = I_FI_A \cdot \frac{IF \cdot IA}{\rho^2}\,.$$

Подставляя эти равенства в (9), получаем

$$I_AI_B \cdot I_CI_D \cdot I_EI_F = I_BI_C \cdot I_DI_E \cdot I_FI_A\,.$$

Это равенство, в свою очередь, означает, что диагонали I_AI_D, I_BI_E и I_CI_F пересекаются в одной точке.

Утверждение 5. Прямая I_AI_D является биссектрисой углов $F_1A_1B_1$ и $C_1D_1E_1$. Аналогично, прямые I_BI_E и I_CI_F являются биссектрисами углов $A_1B_1C_1$, $D_1E_1F_1$, $B_1C_1D_1$ и $E_1F_1A_1$.

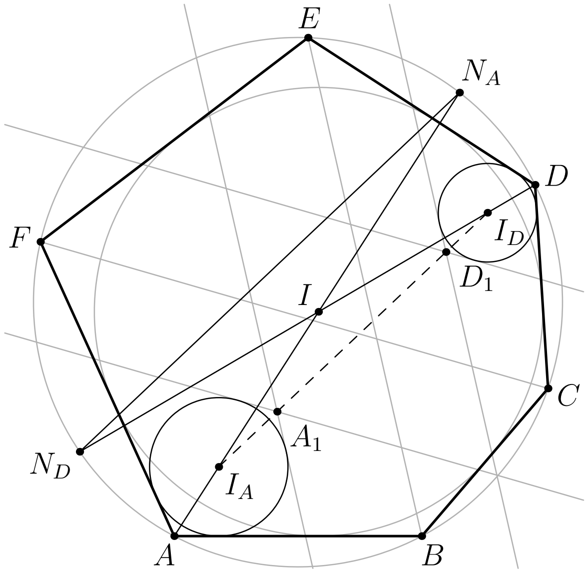

Рис. 5: решение 2 задачи 6.

Доказательство. Пусть N_A и N_D — вторые точки пересечения биссектрис углов $\angle FAB$ и $\angle CDE$ соответственно с описанной окружностью шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 5). Заметим, что

$$\angle(N_AN_D, BE) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{N_DE} + \overset{\frown}{N_AB}) = \\ = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CN_D} + \overset{\frown}{FN_A}) = \angle(CF, N_AN_D)\,.$$

Это значит, что прямая N_AN_D параллельна биссектрисе угла между BE и CF (содержащего точку A). По утверждению 1, N_AN_D также параллельна биссектрисам углов $F_1A_1B_1$ и $C_1D_1E_1$.

Поскольку точки A, D, N_A и N_D лежат на одной окружности, прямые N_AN_D антипараллельны относительно угла AID. С другой стороны, согласно утверждению 4, точки A, D, I_A и I_D лежат на одной окружности (или на одной прямой), то есть прямые AD и I_AI_D также антипараллельны относительно этого угла. Из этих двух наблюдений следует, что $N_AN_D \parallel I_AI_D$.

Итак, биссектрисы углов $F_1A_1B_1$ и $C_1D_1E_1$ параллельны I_AI_D и проходят соответственно через I_A и I_D. Отсюда и следует наше утверждение. $\square$

Ввиду обсуждения выше, утверждение 5 влечет, что диагонали $I_AA_1D_1I_D$, $I_BB_1E_1I_E$ и $I_CC_1F_1I_F$ пересекаются в одной точке и являются биссектрисами углов шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 6). Это также имеет

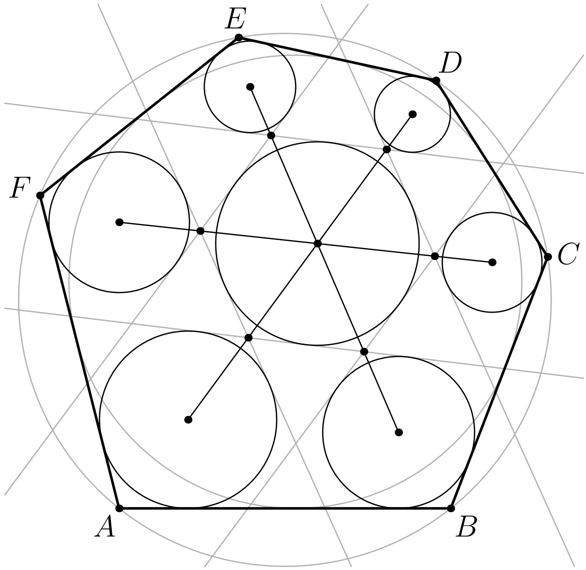

Рис. 6: решение 2 задачи 6.

другое интересное следствие: шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ описан около окружности с центром в точке пересечения его диагоналей. $\square$

Решение 3.

Используя утверждение 4 из предыдущего решения, докажем более общее утверждение:

Теорема. На плоскости фиксированы две окружности Ω и ω, причем ω лежит внутри Ω. Рассмотрим произвольную ломаную $ABCD$, вписанную в Ω, звенья AB, BC, CD которой касаются ω. Пусть I_B, I_C — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и BCD соответственно. Пусть ℓ — прямая, симметричная прямой BC относительно I_BI_C. Тогда ℓ касается фиксированной окружности, не зависящей от выбора ломаной $ABCD$.

Лемма. На плоскости фиксированы две окружности Ω с центром O и ω с центром I, причем ω лежит внутри Ω. Рассмотрим произвольную хорду BC окружности Ω, касающуюся ω. Тогда центр X описанной окружности треугольника BIC лежит на фиксированной окружности Γ с центром в O, не зависящей от выбора хорды BC.

Доказательство леммы. Пусть K и L — проекции точки I на прямые BC и OX соответственно, M — середина BC (рис. 7). Очевидно, что $M \in OX$

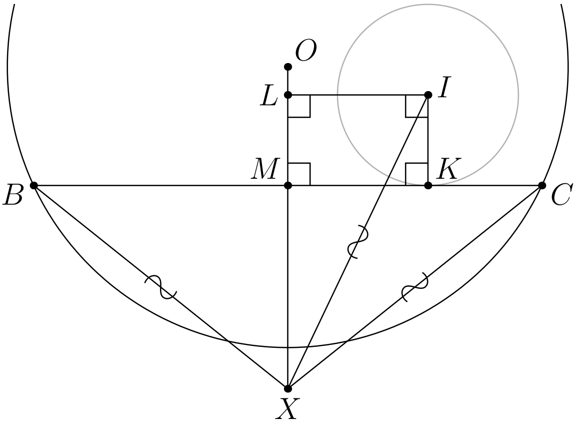

Рис. 7: решение 3 задачи 6.

и что $MKIL$ — прямоугольник. Заметим, что

$$\begin{aligned} OB^2 - OI^2 &= (OB^2 - XB^2) - (XI^2 - OI^2) = \\ &= (OM^2 - XM^2) - (XL^2 - OL^2) = \\ &= (OM + XM)(OM - XM) - (XL + OL)(XL - OL) = \\ &= 2OX \cdot LM = 2OX \cdot IK. \end{aligned}$$

Длины отрезков OB, OI, IK не зависят от положения хорды BC. Значит, длина отрезка OX тоже от нее не зависит. □

Доказательство теоремы. Обозначения X и Γ из формулировки леммы далее сохранены. Пусть f — инверсия с центром в точке I, переводящая B в I_B и C в I_C (из следствия из утверждения 4 ясно, что такая инверсия существует и что она не зависит от выбора ломаной $ABCD$). Обозначим за γ образ Γ под действием f. Пусть G — центр γ, а T — точка касания BC с ω (рис. 8). Известно, что при инверсии f центр X описанной окружности треугольника BIC переходит в точку Y, симметричную I относительно I_BI_C. Докажем, что G равноудалена от всевозможных прямых ℓ.

Для начала покажем, что $GY \perp \ell$. Действительно: $OX \perp BC$ как серединный перпендикуляр; $IX \perp I_BI_C$, так как BC и I_BI_C антипараллельны относительно угла BIC, IX симметрична IT относительно биссектрисы угла BIC и $IT \perp BC$. Из $OX \perp BC$ и $IX \perp I_BI_C$ следует, что $\angle(OX, IX) = \angle(BC, I_BI_C)$. Инверсные окружности Γ и γ также гомотетичны с центром в I, а значит $\angle(OX, IX) = \angle(IY, GY)$. Из симметрии относительно I_BI_C выполнено $\angle(BC, I_BI_C) = \angle(I_BI_C, \ell)$. Получили, что $\angle(IY, GY) = (I_BI_C, \ell)$. Но $IY \perp IB_1IC_1$, и тогда $GY \perp \ell$.

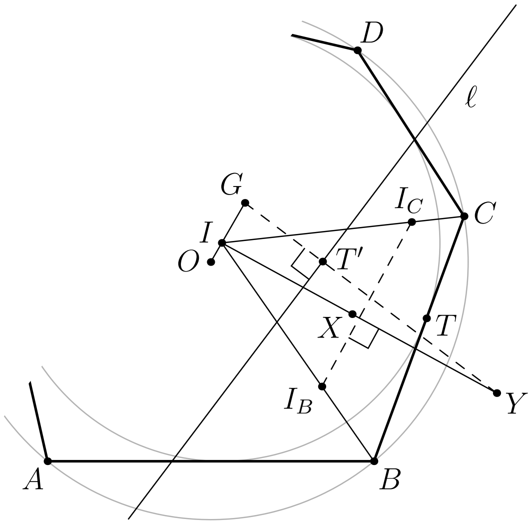

Рис. 8: решение 3 задачи 6.

Пусть точка T' симметрична T относительно I_BI_C. Отрезки IT и YT' симметричны относительно I_BI_C, прямые BC и ℓ — тоже. Значит, $YT' \perp \ell$. То есть G лежит на прямой YT'. Таким образом, (ориентированное) расстояние от G до ℓ равно $GY - YT' = GY - IT = R(\gamma) - R(\omega)$. ($R(s)$ — обозначение для радиуса окружности s). $\square$

Из доказаной теоремы легко следует утверждение задачи. Действительно, все прямые ℓ_{AB}, ℓ_{BC}, ℓ_{CD}, ℓ_{DE}, ℓ_{EF}, ℓ_{FA} касаются одной окружности, что свидетельствует об описанности шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. По теореме Брианшона его диагонали пересекаются в одной точке. $\square$