2-я олимпиада Мегаполисов

День 1

Задача 1. Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом B, в котором $AD > AB$. На диагонали AC выбраны такие точки K и L, что $\angle ABK = \angle ADL$ (точки A, K, L, C различны, причем K лежит между A и L). Прямая BK пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точках B и E, а прямая EL пересекает ω в точках E и F. Докажите, что $BF \parallel AC$.

(Boyan Obukhov)

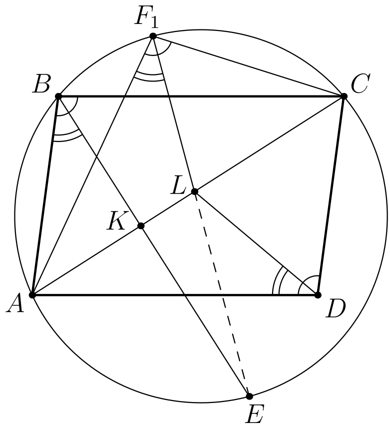

Рис. 1: решение задачи 1.

Рассмотрим точку F_1, симметричную D относительно прямой AC. (рис. 1).

Заметим, что $F_1 \in \omega$. Действительно: по свойству параллелограмма $\angle ABC = \angle ADC$; $\angle ADC = \angle AF_1C$ из симметрии. Тогда $\angle ABC = \angle AF_1C$, а значит четырехугольник ABF_1C вписан в окружность ω.

Отрезки AB и CD равны по свойству параллелограмма, отрезки CD и CF_1 равны из симметрии. Получаем, что $AB = CF_1$. Но тогда ABF_1C — равнобокая трапеция, и $BF_1 \parallel AC$.

В силу симметрии $\angle AF_1L = \angle ADL$; по условию $\angle ADL = \angle ABK$; углы ABK и AF_1E равны, так как опираются на одну дугу AE окружности ω. Имеем $\angle AF_1L = \angle AF_1E$. Полученное равенство означает, что точки F_1, L и E лежат на одной прямой, то есть точки F и F_1 совпадают. Но ранее доказано, что $BF_1 \parallel AC$, откуда следует утверждение задачи. □

Задача 2. В стране между некоторыми парами городов осуществляются двусторонние беспосадочные авиарейсы. Известно, что из любого города в любой другой можно долететь, совершив не более 100 перелетов. Кроме того, из любого города в любой другой можно долететь, совершив четное число перелетов. При каком наименьшем натуральном d из любого города можно гарантированно долететь в любой другой, совершив четное число перелетов, не превосходящее d?

(Разрешается посещать один и тот же город или совершать один и тот же перелет более одного раза.) *(Ilya Bogdanov)*

Ответ: $d = 200$.

Пример, при котором может понадобиться 200 перелетов — 201 город, соединенные по циклу авиалиниями, и пара соседних городов этого цикла. Очевидно, что кратчайший четный маршрут, соединяющий эти два города, потребует 200 перелетов.

Оценка. Рассмотрим два произвольных города A и B и докажем, что от A до B можно добраться за четное число перелетов, не превосходящее 200. Рассмотрим минимальное четное количество перелетов $2k$ из города A в город B и предположим, что $k > 100$. Пусть C — город, посещенный k-ым после A. Заметим, что из A в C можно добраться, совершив $m \leqslant 100$ перелетов. Если m той же четности, что k, это позволяет сократить маршрут из A в B (сначала за m перелетов добираемся из A в C, а затем — за k перелетов из C в B). Но это противоречит минимальности рассматриваемого четного пути из A в B. Значит, m и k разной четности. Аналогично, имеется маршрут из C в B, содержащий $n \leqslant 100$ перелетов, и n и k разной четности. Эти два маршрута позволяют добраться из A в B через C, совершив четное количество $m + n \leqslant 200$ перелетов. Противоречие.

Оценка (другой способ). Рассмотрим два произвольных города A и B. Для каждого города X обозначим через $f(X)$ наименьшее количество перелетов от X до B. Очевидно, $|f(X) - f(Y)| \leqslant 1$ для каждой пары городов X и Y, соединенных авиарейсом. Если для любой такой пары городов $f(X) \neq f(Y)$, то перелеты осуществляются только между городами с разной четностью значения функции f, а значит, между двумя городами, соединенными авиарейсом, можно добраться только с помощью нечетного числа перелетов. Противоречие. Таким образом, найдется перелет XY, для которого $f(X) = f(Y)$. Обозначим $f(X)$ за b; ясно, что $b \leqslant 100$. Из города A можно добраться до X за $a \leqslant 100$ перелетов. Из города A до B можно добраться как за $a+b$ (по кратчайшим маршрутам из A в X и из X в B), так и за $a+b+1$ перелет (по кратчайшим маршрутам из A в X, из X в Y, из Y в B). Один из этих маршрутов нам подходит. $\square$

Задача 3. Пусть $Q(t)$ — квадратный трехчлен с двумя различными действительными корнями. Докажите, что существует многочлен $P(x)$ со старшим коэффициентом 1, не являющийся константой, такой, что модули всех коэффициентов многочлена $Q(P(x))$, быть может кроме старшего, меньше чем 0,001.

(Dušan Djukić)

Приведем $Q(t)$ к виду $Q(t) = c\left((t-a)^2 - D\right)$, где a, c и D — действительные числа, причем $c \neq 0$ и $D > 0$ (последнее верно, поскольку $Q(t)$ обладает двумя различными действительными корнями). Достаточно привести пример многочлена $R(x)$ со старшим коэффициентом 1 такого, что все коэффициенты многочлена $R(x)^2 - D$, кроме старшего, по модулю меньше, чем $\delta = \frac{0.001}{|c|}$, и взять $P(x) = R(x) + a$.

В качестве R будем рассматривать многочлен вида

$$R(x) = x^n + \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(x^{n-a_i} + x^{a_i}\right) + b\,,$$

где m и $a_1 < a_2 < \ldots < a_m < n$ — натуральные числа, b и ε — действительные. Все одночлены в разложении многочлена $R(x)^2$, кроме одночленов вида x^{2n}, x^n и свободного члена, имеют вид x^{2n-a_i}, x^{2n-2a_i}, $x^{2n-a_i-a_j}$, x^{n+a_i}, $x^{n-a_i+a_j}$, x^{n-a_i}, $x^{a_i+a_j}$, x^{2a_i} и x^{a_i}. Выберем числа a_i так, чтобы каждый из этих одночленов встречался только один раз (или два, как $x^{a_i+a_j} = x^{a_j+a_i}$. Если $n > 3a_m$, то достаточно выбрать a_i с условием, чтобы были попарно различны числа a_i и $a_j + a_k$ для всевозможных i, j, k, $j \leqslant k$. Подойдут числа $a_i = 3^{i-1}$ для всех $i = 1, \ldots, m$, и $n = 3^m + 1$.

Коэффициент многочлена $R(x)^2 - D$ при x^n равен $2b + 2m\varepsilon^2$. Таким образом, каждый коэффициент (кроме старшего) многочлена $R(x)^2 - D$ равен одному из чисел

$$0\,,\ 2\varepsilon\,,\ \varepsilon^2\,,\ 2\varepsilon^2\,,\ 2b\varepsilon\,,\ b^2 - D\,,\ 2b + 2m\varepsilon^2\,.$$

Выберем $b = -\sqrt{D}$, $\varepsilon < \min\left\{\frac{\delta}{2b}, \frac{\delta}{2}, \sqrt{\frac{\delta}{2}}\right\}$ и $m = \lfloor\frac{-b}{\varepsilon^2}\rfloor$, и получим, что все эти коэффициенты по модулю меньше δ. $\square$