Первая олимпиада мегаполисов

Сентябрь 2016

Решения задач дня 2

Задача 4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и C прямые. На продолжении стороны AD за точку D дана такая точка E, что $\angle ABE = \angle ADC$. Точка K симметрична точке C относительно точки A. Докажите, что $\angle ADB = \angle AKE$. *(Boyan Obukhov and Fedor Petrov)*

Заметим, что четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность (поскольку сумма его противоположных углов A и C равна $180°$). Тогда углы ADB и BCA равны, поскольку опираются на одну и ту же дугу AB. Значит, достаточно доказать равенство углов BCA и AKE, что равносильно параллельности прямых BC и KE.

Заметим, что в треугольнике ABE сумма углов BAD и ABE меньше $180°$. Тогда сумма соответственно равных им углов BCD и CDA тоже меньше $180°$, поэтому луч CB пересекается с лучом DA в некой точке F, причем $\angle BFA = 90° - \angle ADC = 90° - \angle ABE = \angle BEA$. Значит, треугольник FBE равнобедренный, BA — его высота, откуда $FA = AE$. С другой стороны, по условию, $CA = AK$. Получаем, что в четырехугольнике $FCEK$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, то есть $FCEK$ — параллелограмм, откуда FC и KE параллельны, что и требовалось. $\square$

Задача 5. Дан многочлен $r(x)$ нечетной степени. Докажите, что множество пар многочленов $p(x)$ и $q(x)$, удовлетворяющих равенству $(p(x))^3 + q(x^2) = r(x)$, конечно или пусто. (Все многочлены — с действительными коэффициентами.) *(Fedor Petrov)*

Заменяя x на $-x$ и вычитая, получаем $(p(x))^3 - (p(-x))^3 = r(x) - r(-x) = u(x)$, $u(x)$ — ненулевой многочлен той же степени, что $r(x)$. Таким образом, $p(x) - p(-x)$ — нечетный делитель $u(x)$. Многочлен $u(x)$ имеет только конечное количество делителей с точностью до постоянного множителя. Таким образом, достаточно доказать, что для каждого нечетного делителя $xa_0(x^2)$ многочлена $u(x)$ имеется лишь конечное количество многочленов $p(x)$, для которых $p(x) - p(-x)$ пропорционально $xa_0(x^2)$,

— иными словами, $p(x)$ имеет вид $\lambda x a_0(x^2) + b(x^2)$, где $\lambda \neq 0$ — неизвестная константа и $b(t)$ — неизвестный многочлен. Для доказательства конечности можно считать фиксированным также знак числа λ. Имеем $u(x) = (p(x))^3 - (p(-x))^3 = 2xa_0(x^2) \cdot \big(3\lambda b^2(x^2) + \lambda^3 x^2 a_0^2(x^2)\big)$. Таким образом, многочлен $3\lambda b^2(t) + \lambda^3 t a_0^2(t)$ (мы обозначили $t = x^2$) фиксирован: $3\lambda b^2(t) + \lambda^3 t a_0^2(t) = 3\lambda_0 b_0^2(t) + \lambda_0^3 t a_0^2(t)$ для некоторого фиксированного решения $(\lambda_0, b_0(t))$. Перепишем это как

$$\lambda b^2(t) - \lambda_0 b_0^2(t) = \frac{\lambda_0^3 - \lambda^3}{3} t a_0^2(t)\,.$$

Поделив на λ_0 и разложив левую часть как разность квадратов (мы можем это сделать, так как λ и λ_0 одного знака), получаем, что пара многочленов $\sqrt{\lambda/\lambda_0}\, b(t) \pm b_0(t)$ имеет вид $f(t)$, $\frac{\lambda_0^3-\lambda^3}{3\lambda_0} g(t)$, где $f(t)g(t) = t a_0^2(t)$. Опять же, можно считать многочлены $f(t)$, $g(t)$ фиксированными с точностью до множителя: $f(t) = \tau f_0(t)$, $g(t) = \tau^{-1} g_0(t)$. Имеем

$$2b_0(t) = f(t) - \frac{\lambda_0^3 - \lambda^3}{3\lambda_0} g(t) = \tau f_0(t) - \tau^{-1}\frac{\lambda_0^3 - \lambda^3}{3\lambda_0} g_0(t)\,.$$

Если это происходит при двух различных парах значений (τ, λ) и (τ', λ'), вычитая, получаем:

$$0 = (\tau - \tau') f_0(t) - \left(\tau^{-1}\frac{\lambda_0^3 - \lambda^3}{3\lambda_0} - (\tau')^{-1}\frac{\lambda_0^3 - (\lambda')^3}{3\lambda_0}\right) g_0(t)\,. \tag{1}$$

Если $\tau \neq \tau'$, то многочлены $f_0(t)$ и $g_0(t)$ пропорциональны; но это невозможны, так как их произведение $f_0(t)g_0(t) = t a_0^2(t)$ имеет нечетную степень. Если же τ и τ' равны, то коэффициент при $f(t)$ в 1 равен нулю, откуда и коэффициент при $g(x)$ равен нулю, из чего легко следует $(\lambda')^3 = \lambda^3$. Это означает, что τ и λ фиксированы, то есть $f(x)$ и $g(x)$ фиксированы, и существует не более одного решения. Так как на каждом шаге доказательства мы получали конечное число случаев, то в каждом случае решений конечно, и всего решений тоже не более чем конечно. □

Задача 6. В стране n городов и две авиакомпании A и B. Некоторые пары городов соединены односторонними беспосадочными авиалиниями (каждая авиалиния принадлежит либо A, либо B, между двумя городами может быть более одной авиалинии). Назовем слово w из букв A и B *реализуемым*, если найдется маршрут из последовательных авиаперелетов, названия авиакомпаний в котором идут в том же порядке, как и буквы в слове w. Известно, что все слова длины 2^n из букв A и B реализуемы. Докажите, что любое слово конечной длины из букв A и B реализуемо. (Слово длины k — это любая последовательность из k букв A и B; например, $AABA$ — слово длины 4.) *(Ivan Mitrofanov)*

Предположим противное: пусть нереализуемые слова существуют. Из множества всех нереализуемых слов выберем слово $w = a_1 a_2 \dots a_N$ наименьшей длины (если таких слов несколько — выберем любое из них). Из условия следует, что $N > 2^n$. Для каждого целого $0 \leqslant i \leqslant N$ определим множество A_i концов всех возможных маршрутов, соответствующих слову $a_1a_2\dots a_i$. В частности, A_0 — множество всех городов, A_N — пустое. Так как всего подмножеств множества городов 2^n, по принципу Дирихле какие-то два совпадают. Пусть это $A_i = A_j$, $i < j$.

Рассмотрим слово $w' = a_1a_2\dots a_{i-1}a_ia_{j+1}a_{j+2}\dots a_N$. Оно реализуемо, так как имеет длину меньше, чем N, а N — наименьшая возможная длина нереализуемого слова. Этому слову соответствует какой-то маршрут S. Пусть первые i авиалиний этого маршрута образуют маршрут S_1, а последние $N-j$ — маршрут S_2. Обозначим за T конец S_1. По определению наших множеств, $T \in A_i$. Так как $A_i = A_j$, то существует маршрут S_3, соответствующий слову $a_1a_2\dots a_j$ и заканчивающийся в T. Но тогда маршрут S_3S_2 соответствует слову $a_1a_2\dots a_N$. Противоречие. $\square$