Первая олимпиада мегаполисов

Сентябрь 2016

Решения задач дня 1

Задача 1. Найдите все натуральные n со следующим свойством: существуют n последовательных натуральных чисел, сумма которых является квадратом целого числа. *(Pavel Kozhevnikov)*

Ответ: $n = 2^s \cdot m$, где m — любое нечётное число, а s — 0 или нечётное.

Обозначим $S(n,t) = (t+1) + (t+2) + \ldots + (t+n) = (2t+n+1)nn/2$.

Для нечётного n можно взять $t = (n-1)/2$, тогда $S(n,t) = n^2$.

Пусть n чётное, $n = 2^s \cdot m$, где s натуральное, а m нечётное. Получаем, что $2t+n+1$ — нечётное число. Таким образом, $S(n,t)$ делится на 2^{s-1} и не делится на 2^s. Отсюда сразу следует, что для чётных s квадратом $S(n,t)$ быть не может. Для нечётных s можно взять $t = (mx^2 - n - 1)/2$, где x нечётное, и $x > n$. Тогда получим, что $S(n,t) = 2^{s-1}m^2x^2$. □

Задача 2. Даны натуральные числа $a_1, \ldots, a_n$, удовлетворяющие неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Правительство страны Оптимистики ежегодно публикует *Годовой Отчет*, содержащий n экономических индикаторов. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ индикатор под номером i может принимать натуральные значения $1, 2, \ldots, a_i$. Годовой Отчет называется *оптимистичным,* если значения хотя бы $n-1$ индикаторов выросли по сравнению с предыдущим годом. Докажите, что правительство может бесконечно долго публиковать оптимистичные Годовые Отчеты.

(Ivan Mitrofanov, Fedor Petrov)

Оценим каждое a_i степенями двойки: $2^{k_i} \leqslant a_i < 2^{k_i+1}$. Заметим, что $\sum \frac{1}{2^{k_i}} < \sum \frac{2}{a_i} \leqslant 1$. Покажем, как в натуральном ряду разместить непересекающиеся арифметические прогрессии с разностями 2^{k_i}. Без ограничения общности можно считать, что $k_1 \leqslant k_2 \ldots \leqslant k_n$. Будем доказывать, что можно разместить прогрессии с разностями $2^{k_1}, 2^{k_2}, \ldots, 2^{k_i}$ индукцией по i. База $i = 1$ очевидна. Теперь переход. Пусть мы разместили i прогрессий, покажем, как разместить следующую. Заметим, что при $j < i$ прогрессия с разностью 2^{k_j} целиком занимает $2^{k_i - k_j}$ остатков при делении на 2^{k_i}. Тогда доля остатков, занятых прогрессией 2^{k_j}, равна 2^{-k_j}. А так как сумма обратных величин меньше единицы, то неизрасходованные остатки еще остались, что даёт возможность разместить новую прогрессию.

Перейдём теперь к решению задачи. Будем считать, что i-й индикатор принимает только 2^{k_i} значений. Тогда этот параметр будет каждый год увеличиваться до следующего по величине значения, кроме тех лет, которые пришлись на соответствующую арифметическую прогрессию, в эти годы этот параметр опускается до минимального значения. Как мы видим, каждый параметр возрастает ровно $2^{k_i} - 1$ раз подряд, то есть используется ровно 2^{k_i} значений. $\square$

Задача 3. В окружность вписан выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$. Известно, что центр этой окружности находится строго внутри многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$. На сторонах A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, A_nA_1 взяты соответственно точки B_1, B_2, $\ldots$, B_n, отличные от вершин. Докажите, что

$$\frac{B_1B_2}{A_1A_3} + \frac{B_2B_3}{A_2A_4} + \ldots + \frac{B_nB_1}{A_nA_2} > 1\,.$$

(Nairi Sedrakyan, David Harutyunyan)

Лемма 1. В окружность радиуса R вписан треугольник, в котором нет тупых углов. Тогда его периметр больше $4R$.
Доказательство. Назовём вершины треугольника A, B и C.
Пусть треугольник ABC — прямоугольный. Не нарушая общности, $\angle B = 90^\circ$ и $AC = 2R$. Тогда $AB + BC + AC > AC + AC = 4R$.
Пусть треугольник ABC — остроугольный. Пусть K, L, M — середины сторон AB, BC, AC соответственно. Известно, что центр O описанной окружности треугольника ABC является ортоцентром треугольника KLM, который подобен треугольнику ABC, следовательно, является остроугольным. Поэтому O лежит внутри треугольника KLM. Пусть прямая MO пересекает отрезок KL в точке P. Тогда $AB+BC+AC = 2(AK+KL+LC) = 2(AK + KP) + 2(PL + LC) > 2AP + 2PC > 2AO + 2CO = 4R$ (последнее неравенство верно, поскольку в треугольниках AOP и COP углы AOP и COP — тупые). *Лемма 1 доказана.*

Лемма 2. В окружность радиуса R вписан многоугольник, внутри которого находится её центр. Тогда его периметр P больше $4R$.
Доказательство. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — наш многоугольник. Проведём диагонали $A_1A_3, A_1A_4, \ldots, A_1A_{n-1}$. Тогда центр O лежит внутри или на границе одного из треугольников разбиения $A_1A_iA_{i+1}$. С помощью леммы 1

получаем доказательство леммы 2:

$$P = (A_1A_2 + \ldots + A_{i-1}A_i) + A_iA_{i+1} + (A_{i+1}A_{i+2} + \ldots + A_nA_1) \geqslant$$
$$\geqslant A_1A_i + A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_1 > 4R\,.$$

Лемма 2 доказана.

Вернемся к задаче. Пусть R — радиус описанной около многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ окружности, R_i — радиус описанной окружности треугольника $B_iA_{i+1}B_{i+1}$ (далее будем считать, что $A_{n+1} \equiv A_1$, $A_{n+2} \equiv A_2$, $B_{n+1} \equiv B_1$). По теореме синусов $B_iB_{i+1}/\sin\angle A_{i+1} = 2R_i$, $A_iA_{i+2}/\sin\angle A_{i+1} = 2R$, поэтому $B_iB_{i+1} : A_iA_{i+2} = (2R_i\sin\angle A_{i+1}) : (2R\sin\angle A_{i+1}) = R_i : R$.

$$\frac{B_1B_2}{A_1A_3} + \frac{B_2B_3}{A_2A_4} + \ldots + \frac{B_nB_1}{A_nA_2} > 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{R_1}{R} + \frac{R_2}{R} + \ldots + \frac{R_n}{R} > 1$$
$$\Updownarrow$$
$$R_1 + R_2 + \ldots + R_n > R\,.$$

В треугольнике $B_iA_{i+1}B_{i+1}$ каждая из сторон не превосходит диаметра описанной окружности, поэтому $B_iA_{i+1} + A_{i+1}B_{i+1} \leqslant 2R_i + 2R_i = 4R_i$ и $R_i \geqslant (B_iA_{i+1} + A_{i+1}B_{i+1})/4$. Значит, достаточно доказать неравенство

$$R < \frac{B_1A_2 + A_2B_2}{4} + \frac{B_2A_3 + A_3B_3}{4} + \ldots + \frac{B_nA_1 + A_1B_1}{4} = \frac{P}{4},$$

что верно по лемме 2. □