Подготовка к финалу в Хамовниках. 9 класс

Задачи по алгебре, геометрии и комбинаторике. 13 апреля.

Алгебра и теория чисел

1. Найдите наименьшее x, удовлетворяющее уравнению $x^2-[x]^2=2012$. (Где $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x.)

2. Действительное число x таково, что дробные части чисел x^3, x^4 и x^5 совпадают. Докажите, что x – целое число.

3. Последовательность натуральных чисел $\{a_i\}$ задана правилами: $a_1=1$ и $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$. Докажите, что $a_{100}>14$.

4. Сумма шести действительных чисел равна нулю, а сумма квадратов равна 6. Докажите, что их произведение не больше $\frac{1}{2}$.

5. Даны натуральные числа $1<b<a$. Оказалось, что $ab-1$ делится на $a-b$, а $ab+1$ делится на $a+b$. Докажите, что $a<b\sqrt{3}$.

6. Произведение действительных чисел a,b,c равно 1. Известно, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant a+b+c$. Докажите, что $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}\geqslant a^n+b^n+c^n$ для любого натурального n.

7. Найдите все такие простые p и натуральные k, что $p^2-p+1=k^3$.

8. Положительные действительные числа $x_1,x_2,\ldots x_n$ и k таковы, что $x_1+x_2+\ldots+x_n=3k$, $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=3k^2$, а $x_1^3+x_2^3+\ldots x_n^3>3k^3+k$. Докажите, что какие-то два из чисел $x_1,\ldots x_n$ отличаются больше, чем на 1.

Комбинаторика

9. У торговцев Пети и Васи было по 30 пирожков. Они начали продавать их по 30 рублей. Если у одного из них покупают пирожок, другой немедленно снижает цену на свои пирожки на один рубль (пирожки продаются только по одному, и такого, чтобы они продавали по пирожку одновременно, не бывает). Сколько денег выручат в сумме Петя и Вася, когда продадут все свои пирожки? (Найдите все варианты и докажите, что других нет.)

10. В связной клетчатой фигуре ровно n белых клеток. Какое наибольшее количество чёрных клеток может в ней быть?

11. Клетки доски 100×100 раскрашены в три цвета. За один ход можно клетки одного квадрата перекрасить в преобладающий цвет, а если такого нет, то перекрасить в отсутствующий. Докажите, что можно сделать доску одноцветной.

12. У Васи есть 100 банковских карточек. Вася знает, что на одной из карточек лежит 1 рубль, на другой – 2 рубля, и так далее, на последней – 100 рублей, но не знает, на какой из карточек сколько денег. Вася может вставить карточку в банкомат и запросить некоторую сумму. Банкомат выдает требуемую сумму, если она на карточке есть, не выдает ничего, если таких денег на карточке нет, а карточку съедает в любом случае. При этом банкомат не показывает, сколько денег было на карточке. Какую наибольшую сумму Вася может гарантированно получить?

13. Фред выписал в строку числа 1, 2, …, n в некотором порядке. Затем он составил список всех пар (i,j), $1\leq i<j\leq n$, для которых число, стоящее в этой строке на i-м месте, больше числа, стоящего на j-м месте. После этого Фред повторяет следующую операцию: он выбирает из списка пару (i,j), меняет местами числа, стоящие в строке на i-м и j-м местах, после чего вычеркивает пару (i,j) из списка. Процесс заканчивается, когда в списке не останется ни одной пары. Докажите, что Фред может выбирать пары в таком порядке, чтобы в итоге числа в строке оказались расположенными в порядке возрастания.

14. Есть полный граф на 2015 вершинах. Два игрока по очереди красят рёбра графа: первый игрок своим ходом красит одно ребро в красный, а второй – 10 рёбер в синий. Красить одно ребро два раза нельзя. Может ли первый гарантированно получить красный цикл, проходящий ровно по 11 различным вершинам по одному разу по каждой из них?

15. Назовём *квадратностью* прямоугольника частное от деления длины его меньшей стороны на длину большей, квадратность квадрата равна 1. Квадрат разбит на несколько прямоугольников. Докажите, что сумма их квадратностей не менее 1.

16. Внутри квадрата 101×101 часть перегородок между клетками убрано, а часть оставлено, в результате чего получился лабиринт (все граничные перегородки присутствуют). Известно, что центральной клетке находится база, а между любыми двумя клетками есть путь, не проходящий через перегородки.

В одной из клеток доски находится робот. Игрок, управляющий роботом, знает план лабиринта, но не знает, где изначально находится робот. Он должен послать ему программу – текст, состоящий из слов «влево», «вправо», «вверх» и «вниз». Робот последовательно пытается выполнять команды: если может, то передвигается на одну клетку в нужном направлении, а если ему мешает перегородка, то пропускает команду.

Докажите, что игрок может написать такую программу, чтобы после её окончания робот гарантированно оказался на базе.

17. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами. При этом из каждого города выходит хотя бы 3 дороги. Докажите, что существует циклический маршрут, длина которого не делится на 3.

18. Дима придумал секретный шифр: каждая буква заменяется на слово длиной не больше 10 букв. Шифр называется хорошим, если всякое зашифрованное слово расшифровывается однозначно. Серёжа убедился (с помощью компьютера), что если зашифровать слово длиной не больше 10000 букв, то результат расшифровывается однозначно. Следует ли из этого, что шифр хороший? (В алфавите 33 буквы, под «словом» мы понимаем любую последовательность букв, независимо от того, имеет ли она смысл.)

Геометрия

19. На дуге AB описанной окружности равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) выбрана точка P. Точка D — проекция точки C на прямую PB — лежит на отрезке PB. Докажите, что $2PD = PA + PB$.

20. Пусть O – центр вневписанной окружности треугольника ABC напротив вершины A. M – середина отрезка AC, P – точка пересечение BC и OM, $\angle BAC = 2\angle ACB$. Докажите, что $AB = BP$.

21. Дан треугольник ABC. Обозначим через M середину стороны AC, а через P – середину отрезка CM. Описанная окружность треугольника ABP пересекает сторону BC во внутренней точке Q. Докажите, что $\angle ABM = \angle MQP$.

22. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) точка D — середина основания BC, а E — основание перпендикуляра, опущенного из D на сторону AC. Прямая BE пересекает окружность, описанную около треугольника ABD, в точке $F \neq B$. Докажите, что прямая AF делит отрезок DE пополам.

23. Внутри угла MON отмечена точка X такая, что $\angle OMX = \angle ONX = 90°$. На отрезках OM и ON отмечены точки Y и Z соответственно такие, что $XY \perp MZ$, а $XZ \perp NY$. Докажите, что $OM = ON$.

24. Пусть в треугольнике ABC $BC > AC > BA$. На луче BC выбрана точка D, на луче BA выбрана точка E такие, что $BD = BE = AC$. Описанная окружность треугольника BDE пересекает AC в точке P, прямая BP пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке Q. Докажите, что $AQ + QC = BP$.

25. I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC, в котором $\angle A = 60°$. На стороне AB выбрана точка M такая, что $IM \parallel AC$. На стороне BC выбрана точка K такая, что $\angle BMK = \angle IBM$. Чему равно отношение BK/BC?

26. Две окружности σ_1 и σ_2 пересекаются в точках A и B . Пусть PQ и RS – отрезки общих внешних касательных к этим окружностям (точки P и R лежат на σ_1 , точки Q и S – на σ_2). Оказалось, что $RB||PQ$. Луч RB вторично пересекает σ_2 в точке W . Найдите отношение RB/BW.

27. Пусть точки A', B', C' симметричны вершинам треугольника A, B, C относительно прямых BC, AC, AB соответственно. Докажите, что A', B', C' лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда расстояние между ортоцентром и центром описанной окружности треугольника ABC равно диаметру описанной окружности этого треугольника.