

Кружок в Хамовниках. 9 класс
Теорема Минковского. 28.09.

23. а) Вершины выпуклого пятиугольника — целые точки. Докажите, что найдётся ещё хотя бы одна целая точка внутри пятиугольника или на его границе.

б) У выпуклого многогранника девять вершин, и все они целые. Докажите, что внутри или на границе многогранника найдётся ещё хотя бы одна целая точка.

24. Карта Москвы масштаба $1 : 45000$ разрезана на 60 прямоугольников 9×13 см. После того, как прямоугольники совместили, получился атлас.

Докажите, что иглой можно проткнуть этот атлас так, чтобы хотя бы на 10 листах было проткнуто что-нибудь зелёное.

Справочная информация: общая площадь садов, скверов и парков Москвы составляет 343 км^2 .

25. Докажите, что внутри любого множества Φ площади $1,001$ можно выбрать две разные точки A и B так, чтобы вектор $\overrightarrow{AB}$ был целым.

Множество Φ можно считать объединением внутренностей нескольких многоугольников.

26. (*Теорема Минковского о выпуклом теле.*) На плоскости нарисован выпуклый центрально симметричный многоугольник с центром в точке $(0; 0)$. Площадь многоугольника больше четырёх. Докажите, что внутри него есть ещё хотя бы одна целая точка.

27. а) Докажите, что площадь треугольника с вершинами в целых точках — число либо целое, либо полуцелое (то есть вида $n + \frac{1}{2}$).

б) (*Частный случай формулы Пика.*) Все вершины параллелограмма — целые точки, а других целых точек внутри него или на границе нет. Докажите, что его площадь равна 1.

Определения.

Фигура называется *выпуклой*, если вместе с любыми своими точками X_1 и X_2 она целиком содержит отрезок X_1X_2 .

Точка на плоскости называется *целой* или *целочисленной*, если обе её координаты — целые числа. *Целый* вектор — это вектор, все координаты которого целые.