Кружок в Хамовниках. 9 класс

Серия 9. Неравенства о средних, максимумы и минимумы. 20.10 - 23.10

56. Докажите, что для положительного x выполнено неравенство $2x + \frac{3}{8} \geqslant \sqrt[4]{x}$.

57. Докажите, что для положительных x, y выполнено неравенство $x^4 + y^4 + 8 \geqslant 8xy$.

58. Для положительных x, y, z докажите, что $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geqslant x + y + z$.

59. Из квадратного листа жести со стороной 1 пытаются сложить коробку. Для этого от каждого из углов листа отрезают равные квадраты (получают фигуру, напоминающую крест.) После этого квадрат посередине используют как дно коробки, а боковые прямоугольники – как стенки. На какой наибольший объём коробки можно рассчитывать?

60. Для положительных a, b, c докажите, что $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$.

61. Сумма нескольких положительных чисел равна 10. Сумма их квадратов равна 20. Какое наименьшее значение может принимать сумма их кубов?

62. На отрезке $[0, 1]$ требуется выбрать n точек так, чтобы сумма а) квадратов б)четвёртых степеней попарных расстояний между ними была как можно больше. Как это сделать?

63. Докажите, что $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n} \geqslant n(\sqrt[n]{n+1} - 1)$.

64. Для **натуральных** a, b и c докажите, что $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geqslant \sqrt[a+b+c]{a^a b^b c^c}$.