Кружок в Хамовниках. 9 класс

Серия 8. Пары, отрезки, трегольники, порядки по кругу и не только. 13.10 - 16.10.

47. В выпуклом шестиугольнике противоположные стороны равны и параллельны. Проводятся все 6 неглавных диагоналей. При этом шестиугольник разделяется на меньший шестиугольник и 12 треугольников. Докажите, что площадь меньшего шестиугольника равна сумме площадей тех шести треугольников, которые имеют две общие вершины с исходным шестиугольником.

48. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки B' и C' симметричны соответственно вершинам B и C относительно прямых AC и AB. Пусть P – точка пересечения описанных окружностей треугольников ABB' и ACC', отличная от A. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой PA.

49. В четырёхугольнике $ABCD$ отметили середину BC точку M. Оказалось, что $\angle AMD = 120°$. Докажите, что $AB + BM + CD \geqslant AD$.

50. Известно, что некоторые сенаторы между собой в ссоре. Проверено, однако, что как бы мы не посадили их всех или любую группу (3 или более) из них по кругу, найдется пара соседей не в ссоре. Весь сенат усадили за круглый стол. Если два соседа не в ссоре, они могут поменяться местами. Докажите, что сенаторы могут расположиться в любом круговом порядке (порядки, полученные поворотом, не различаются).

51. Для произвольных чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 докажите неравенство

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \geqslant x_1(x_2 + x_3 + x_4 + x_5).$$

52. Докажите неравенство для чисел x, y, z из отрезка $[0; 1]$:

$$3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - 2xyz(x + y + z) \leqslant 3.$$

53. Найдите все пары таких простых p и q, что $(7^p - 2^p)(7^q - 2^q)$ делится на pq.

54. На столе лежат карточки с числами от 1 до 14. Петя и Вася по очереди берут по одной карточке со стола (начинает Петя). Цель Васи в том, чтобы когда осталось две карточки, их сумма была полным квадратом. Сможет ли Петя ему помешать?

55. В городе М 7 высоток. Из каждой точки они видны в каком-то порядке. Может ли так оказаться, что гуляя по городу, мы можем увидеть высотки в любом порядке?