

Кружок в Хамовниках. 9 класс
Серия 7. Юноши и девушки. 06.10

Будем называть множество из k юношей *перспективным*, если суммарно эти юноши знают хотя бы k девушек, а *критическим* — если они знают ровно k девушек.

Лемма Холла гласит, что *всех юношь можно женить на знакомых им девушках тогда и только тогда, когда любое множество юношь является перспективным*.

40. Предположим, что любое множество юношь является перспективным. Предположим, что нельзя женить всех одновременно. Тогда рассмотрим наибольшее количество пар, которое можно образовать. Рассмотрим юношу, не вошедшего в эти пары. Он начинает организовывать своё тайное общество. В первый день в этом обществе только он. Каждый следующий день каждый юноша, входящий в это общество приглашает туда всех знакомых с ним девушек, а они приводят туда своих мужей (если таковые есть).

- а) Докажите, что рано или поздно в общество придёт девушка, которая в первоначальное разделение на пары не входила.
- б) Докажите, что в таком случае можно переженить людей так, чтобы количество пар увеличилось.
- в) Докажите лемму Холла.

41. В частном охранном предприятии работает n охранников. Ежедневно им нужно распределяться по n объектам. По прошествии k дней оказалось, что никто дважды на одном объекте не дежурил. Докажите, что можно составить расписание на оставшиеся $n - k$ дней так, чтобы все охранники подежурили по одному разу на всех объектах.

42. Каждый из двух равновеликих квадратов разбит на 100 равновеликих частей. Докажите, что можно сложить эти квадраты в стопку и проткнуть в 100 точках так, чтобы каждая из 100 частей каждого из квадратов была проткнута.

43. а) В 2014-элементном множестве выбрали несколько 1003-элементных множеств. Докажите, что можно добавить к каждому из них по одному элементу, чтобы получившиеся 1004-элементные множества тоже были различны.

б) В 2014-элементном множестве выбрали несколько подмножеств так, что никакое из выбранных подмножеств не содержится в другом выбранном. Докажите, что выбрали не более C_{2014}^{1007} подмножеств.

44. Предположим, что любое множество юношь является перспективным. Рассмотрим наименьшее критическое множество юношь (если оно есть). Докажите, что можно поженить любого юношу из наименьшего критического множества на любой его знакомой, и все множества останутся перспективными.

45. В классе некоторые мальчики дружат с некоторыми девочками (дружба взаимна). Назовём множество мальчиков *хорошим*, если можно пересадить всех учеников в классе так, чтобы мальчики из этого множества сидели с девочками, с которыми дружат. Аналогично определяется *хорошее* множество девочек. Известно, что множество всех мальчиков не является хорошим. Докажите, что можно какого-то мальчика перевести в другой класс так, что всякое хорошее множество девочек останется хорошим.

46. Даны k мальчиков и $2k - 1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков (чтобы не создавать предпосылок для драки).