

Серия 5. Новые задачи о старом. 25.09 - 29.09

28. Квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$ с положительными коэффициентами таков, что уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет три корня. Докажите, что дискриминант этого трехчлена больше 16.

29. Имеется несколько юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: “Я могу одновременно женить всех брюнетов так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!”. Вторая сваха говорит: “А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая выйдет замуж за знакомого юношу!”. Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: “В таком случае можно сделать и то, и другое одновременно!”. Прав ли он?

30. На плоскости нарисованы $n > 2$ кругов, которые попарно не пересекаются (но могут касаться). Точки касания отмечены красным цветом. Докажите, что отмечено не более $3n - 6$ красных точек.

31. На клетчатой плоскости отмечен один из узлов – точка O . Для каждой точки X плоскости определим $P_O(X)$ – количество узлов плоскости, которые ближе к X , чем точка O . Рассмотрим множество Φ_{1000} , состоящее из всех точек X , для которых $P_O(X) = 1000$. Докажите, что площадь Φ_{1000} равна 1.

32. Докажите, что композиция двух гомотетий (их центры не обязательно совпадают) с коэффициентами k_1 и k_2 , где $k_1 k_2 \neq 1$, является гомотетией. Найдите ее центр и коэффициент. Что будет, если $k_1 k_2 = 1$?

33. Даны натуральные взаимно простые числа a и n .

- а) Докажите, что существует такое натуральное k , что $a^k - 1 \vdots n$.
- б) Докажите, что всякое такое k делится на наименьшее число, обладающее таким свойством.
- в) Докажите, что всякий делитель числа $2^p - 1$ (p – простое) имеет вид $2kp + 1$

34. Пусть $A_1 B_1 C_1$ – треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно центра вписанной окружности его серединного треугольника. Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1 B_1 C_1$ совпадает с центром описанной окружности треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей треугольника ABC .