

Серия 3. Второй подряд разнбой. 22.09 - 25.09

16. Сумма минимального значения квадратного трехчлена $ax^2 + 8x + b$ и минимального значения трехчлена $bx^2 + 8x + a$ равна 0. Докажите, что эти минимальные значения оба равны 0.

17. Прямоугольник разделен k вертикальными и m горизонтальными прямолинейными разрезами на $(k + 1)(m + 1)$ прямоугольников (необязательно равных). За один вопрос можно узнать площадь любого из них. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно узнать площадь исходного прямоугольника?

18. Произвольная точка P соединена с серединами A_1, B_1, C_1 сторон BC, CA и AB треугольника ABC . Докажите, что прямые, проведенные через его вершины A, B, C параллельно соответственно прямым PA_1, PB_1, PC_1 , пересекаются в одной точке.

19. Треугольник ABC вписан в окружность. Точки A_1, B_1, C_1 — середины дуг BC, AC, AB соответственно. Стороны треугольника ABC высекают на отрезках A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 меньшие отрезки с серединами C_2, A_2, B_2 соответственно. Докажите, что точки B_1, C_1, B_2, C_2 лежат на одной окружности.

20. Докажите, что для любого натурального a число $a^{561} - a$ делится на 561.

21. Даны $n > 1$ приведённых квадратных трёхчленов $x^2 - a_1x + b_1, \dots, x^2 - a_nx + b_n$, причём все $2n$ чисел $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ различны. Может ли случиться, что каждое из чисел $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ является корнем одного из этих трёхчленов?

22. Есть неизвестное Пете двузначное число n . За один вопрос Петя может для любого натурального числа k узнать сумму цифр числа kn . За какое наименьшее количество вопросов он сможет наверняка угадать n ?

Каждый следующий вопрос задаётся после ответа на предыдущий.