

*Кружок в Хамовниках. 9 класс*  
**Серия 2. Разной. 15.09 - 18.09**

**8.** Докажите, что простых чисел вида  $4k + 3$  бесконечно много.

**9.** Пусть  $r$  — радиус вписанной в треугольник окружности, а  $r_a, r_b, r_c$  — радиусы вневписанных. Докажите, что  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$ .

**10.** Натуральные числа таковы, что  $m^2 + n^2 + m \vdots mn$ . Докажите, что число  $m$  является точным квадратом.

**11.** Вася написал на доске 6 многочленов, так что сумма любых двух из них не имеет вещественных корней. Докажите, что он может выбрать из них три, сумма которых также не имеет вещественных корней.

**12.** Клетчатая плоскость раскрашена в 10 цветов. (Каждая клетка окрашена в один цвет, все цвета присутствуют.) Любые две соседние клетки окрашены в разные цвета. Назовём пару цветов *хорошей*, если есть две соседние клетки, окрашенные в эти цвета. Какое наименьшее количество хороших пар?

**13.** Внутри треугольника  $ABC$  на биссектрисе угла  $B$  выбрана точка  $D$ . Серединный перпендикуляр к  $BD$  пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $X$  и  $Y$ , а лучи  $AD$  и  $CD$  — в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Оказалось, что  $LX \cdot KY = BX^2$ . Докажите, что  $D$  — точка пересечения биссектрис треугольника  $ABC$ .

**14.** Рассмотрим все треугольники с вершинами в вершинах выпуклого 2010-угольника. Докажите, что любая точка, не лежащая на сторонах таких треугольников, покрыта четным числом из них.

**15.** Есть 1000 яблок, которые надо разложить в 10 пакетов по 100 яблок в каждом. Оказалось, что при любой такой раскладке найдутся хотя бы два пакета одинакового веса. При каком наибольшем  $k$  можно заведомо утверждать, что найдутся  $k$  яблок одинакового веса?