

Кружок в Хамовниках. 9 класс

Серия 27. Теорема Виета. Симметрические многочлены. Корни многочленов. 16 марта

Просто применить теорему Виета. Или непросто...

210. Вычислите сумму квадратов корней уравнения $x^4 - 4x^3 + x + 1 = 0$;

211. Напишите многочлен, корнями которого были бы числа, обратные корням многочлена $x^3 - 2x + 2$.

212. Найдите сумму шестых степеней корней многочлена $x^5 + x^2 - 1$.

213. Числа a, b, c удовлетворяют равенствам: $a+b+c = 3$, $a^2+b^2+c^2 = 5$, $a^3+b^3+c^3 = 7$. Чему равно $a^4 + b^4 + c^4$?

Теорема Виета там, где её ещё надо увидеть.

214. вещественные числа x, y, z таковы, что $x + y + z > 0$, $xy + yz + zx > 0$ и $xyz > 0$. Докажите, что все три числа положительны.

215. Известно, что $abc = 1$ и $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что одно из чисел a, b, c равно 1.

216. В клетках квадрата 3×3 расставлены числа так, что получился магический квадрат (суммы чисел в строках, столбцах и главных диагоналях равны). Оказалось, что сумма кубов чисел верхней строки равна сумме кубов чисел нижней строки. Докажите, что наборы чисел верхней и нижней строк совпадают.

217. (*Кстати о неравенствах*) Вещественные числа x, y, z таковы, что $x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Какое наименьшее значение может принимать $x^3 + y^3 + z^3$?

218. Сколькими способами числа $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{2015}$ можно разбить на два непустых множества A и B так, чтобы уравнение $x^2 - S(A)x + S(B) = 0$, где $S(M)$ – сумма чисел множества M , имело целый корень?

219. Существует ли такое конечное множество M ненулевых действительных чисел, что для любого натурального n найдется многочлен степени не меньше n с коэффициентами из множества M , все корни которого действительны и также принадлежат M ?

О симметрических многочленах

220. Как известно, многочлен $x^{2015} + y^{2015}$ представим в виде многочлена от xy и $x + y$. Чему равна сумма коэффициентов этого многочлена?

221. Как известно, симметрический многочлен можно представить как многочлен от основных симметрических. Докажите, что такое представление единственно.