Кружок в Хамовниках. 9 класс

Серия 23. Комплексные числа 2.

Определение. *комплексным числом называется выражение вида $a + bi$, где a и b вещественные, а символ i удовлетворяет равенству $i^2 = -1$.* Арифметические операции над комплексными числами осуществляются так же, как и над вещественными с учётом последнего условия.

Числа $a + bi$ и $a - bi$ называются *сопряжёнными.*
Сопряжённое к z число обозначается $\bar{z}$.

Каждое комплексное число можно представить в виде $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, причём r определяется единственным образом, а φ — единственным с точностью до кратного 2π (если комплексное число не равно 0). Это называется *тригонометрической формой* комплексного числа. Число r называется модулем комплексного числа, а φ — аргументом.

179. а) Докажите, что при умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются.
б) При делении одного комплексного числа на другое из аргумента делимого нужно вычесть аргумент делителя, а модули поделить.
в) Докажите *формулу Муавра* $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.
г) Вычислите $(1+i)^{2015}$ и $(1+\sqrt{3}i)^{2015}$.

180. Вычислите $\cos\phi + \cos 2\phi + \ldots \cos n\phi$.

181. Вычислите а) $C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^{2k} + \ldots$
б) $C_n^0 + C_n^4 + \ldots + C_n^{4k} + \ldots$
в) $C_n^0 + C_n^3 + \ldots + C_n^{3k} + \ldots$

182. Корни многочлена $x^n - 1$ называются *корнями n-ой степени из единицы.* а) Представьте их в тригонометрической форме.
б) Найдите их сумму.
в) Найдите их сумму квадратов.
г) Найдите их произведение.

183. Модули чисел x, y, z равны 1. Найдите модуль числа $\frac{xy+xz+yz}{x+y+z}$.

Важный факт, который мы пока что мы примем без доказательства.

Основная теорема алгебры. *Всякий многочлен положительной степени с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.*

184. Докажите, что $x^{66}+x^{55}+x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$ делится на $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.