Кружок в Хамовниках. 9 класс

Серия 18. Домашнее задание по делимости.

145. Вася выписал на доске 4 числа. После этого он посчитал НОД каждых двух из них. У него получилось 6 различных натуральных чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и n. Какое наименьшее значение может принимать n?

146. Пусть каждое из натуральных чисел n, $n+1$, $n+2$ делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что число n делится на куб некоторого своего простого делителя.

147. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $ab = cd$. Докажите, что число $a^{2014} + b^{2014} + c^{2014} + d^{2014}$ составное.

148. a, b, c – натуральные числа. Докажите, что если $ab+9b+81$ и $bc+9c+81$ делятся на 101, то и $ca + 9a + 81$ делится на 101.

149. Многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами таков, что для любого натурального n найдётся натуральное k такое, что $f(k)$ делится на n. Докажите, что для любого натурального n произведение значений многочлена f в n последовательных натуральных чисел делится на $n!$.

150. Натуральное число N является квадратичным вычетом по любому модулю (не обязательно простому), то есть для любого натурального n существует такое целое k, что $N \equiv k^2 \pmod{n}$. Докажите, что N — точный квадрат.

Кружок в Хамовниках. 9 класс

Серия 18. Домашнее задание по делимости.

145. Вася выписал на доске 4 числа. После этого он посчитал НОД каждых двух из них. У него получилось 6 различных натуральных чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и n. Какое наименьшее значение может принимать n?

146. Пусть каждое из натуральных чисел n, $n+1$, $n+2$ делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что число n делится на куб некоторого своего простого делителя.

147. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $ab = cd$. Докажите, что число $a^{2014} + b^{2014} + c^{2014} + d^{2014}$ составное.

148. a, b, c – натуральные числа. Докажите, что если $ab+9b+81$ и $bc+9c+81$ делятся на 101, то и $ca + 9a + 81$ делится на 101.

149. Многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами таков, что для любого натурального n найдётся натуральное k такое, что $f(k)$ делится на n. Докажите, что для любого натурального n произведение значений многочлена f в n последовательных натуральных чисел делится на $n!$.

150. Натуральное число N является квадратичным вычетом по любому модулю (не обязательно простому), то есть для любого натурального n существует такое целое k, что $N \equiv k^2 \pmod{n}$. Докажите, что N — точный квадрат.