Кружок в Хамовниках. 9 класс

Серия 15. Комплексные числа. Начало.

Определение. *комплексным числом называется выражение вида $a + bi$, где a и b вещественные, а символ i удовлетворяет равенству $i^2 = -1$.* Арифметические операции над комплексными числами осуществляются так же, как и над вещественными с учётом последнего условия.

Числа $a + bi$ и $a - bi$ называются *сопряжёнными.*

Упражнение. Выполните арифметические операции

а) $1 + 2i + 4 + 5i$;
б) $(1 + 3i) \times (4 + 2i)$;
в) $(2 - i)(2 + i)$;
г) $(1 + i)^3$;
д) $1 : (2 + i)$;
е) $(3 + 4i) : (3 - 4i)$

110. Докажите, что $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ и $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

111. Докажите, что если z является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то $\overline{z}$ тоже является.

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

112. Докажите, что а) $|z \cdot t| = |z| \cdot |t|$; б) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

113. Докажите, что если два натуральных числа представляются в виде суммы двух квадратов, то их произведение тоже представляется в виде суммы двух квадратов.

114. Докажите, что для каждого ненулевого комлпексного числа z существует ровно два числа z_1 таких, что $z_1^2 = z$.

115. Решите уравнение $z^2 - (3 - i)z + 4 = 0$.

116. Докажите, что каждое комплексное число можно представить в виде $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, причём r определяется единственным образом, а φ — единственным с точностью до кратного 2π (если комплексное число не равно 0).

117. Представьте в тригонометрической форме числа 2, $1 + i$, $1 - \sqrt{3}i$.