Кружок в Хамовниках. 9 класс

Серия 14. Игры и функция Шпрага-Гранди.

Беспристрастной игрой называется такая игра двух игроков, в которой допустимые ходы зависят только от игровой позиции и не важно, кто именно из игроков ходит.

Классический пример такой игры — *ним*: в нескольких кучках лежат камни, двое ходят по очереди, за один ход разрешается взять сколько угодно камней из одной из кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Если бы первому разрешалось брать только чётное число камней, а второму – только нечётное, то игра не была бы беспристрастной.

В дальнейшем будем считать, что все игры заканчиваются за конечное число ходов и проигрывает тот, у кого нет хода. Каждую такую игру можно изобразить в виде конечного ориентированного графа без ориентированных циклов, в одной из вершин которого находится фишка, которую два игрока по очереди передвигают.

Суммой $A + B$ двух беспристрастных игр A и B называют следующую игру: за один ход игрок может сделать либо ход в игре A, либо ход в игре B.

Например, суммой двух игр ним, в каждой из которых по две кучи камней, является игра Ним с четырьмя кучками.

101. Можно ли определить, кто выигрывает в игре $A + B$, если
а) В игре A выигрывает первый, а в игре B – второй;
б) В обеих играх выигрывает первый;
в) В обеих играх выигрывает второй?

Назовём игры A и B *эквивалентными*, если в игре $A + B$ начинающий проигрывает.

102. Докажите, что если игра A эквивалентна игре B, а игра B эквивалентна игре C, то игра A эквивалентна игре C.

103. Приведите пример бесконечного числа игр, никакие две из которых не эквивалентны.

104.Теорема Шпрага-Гранди. Любая непредвзятая игра эквивалентна игре ним с одной кучкой камней. Количество камней в этой куче называется *нимбером* или *функцией Шпрага-Гранди* этой игры.

Указание. В ориентированном графе расставьте в вершинах неотрицательные целые числа так, чтобы из числа k нельзя было за один ход перейти в число k и можно было перейти во все меньшие неотрицательные целые числа.

Начинающий выигрывает в игре тогда и только тогда, когда её нимбер больше нуля.

105. На столе лежат n спичек, за ход разрешается брать от 1 до k. Найдите нимбер этой игры.

Побитовой суммой целых неотрицательных чисел m и n называется такое число $m \oplus n$, что в двоичной системе счисления $i-$тая цифра числа $m \oplus n$ равна 1, если соответствующие

цифры у чисел m и n разные, и 0, если одинаковые. Пример: $9_2 = 1001$, $3_2 = 11$, $10_2 = 1010$. Поэтому $3 \oplus 9 = 10$.

106. Пусть нимбер игры A равен n, нимбер игры B равен m. Докажите, что нимбер игры $A + B$ равен $n \oplus m$. (Иными словами, в игре ним с тремя кучками размеров n, m, $m \oplus n$ выигрывает второй.)

107. Шоколадка имеет форму прямоугольника 100×100, плитка с координатами $(13, 12)$ отравлена. За один ход разрешается разломить шоколадку на два прямоугольника и съесть неотравленную часть. Кто выигрывает при правильной игре?

108. На столе лежат три кучи камней. В одной 1001, в другой 555, в третьей 666. За один ход можно взять 1 до 99 камней из любой кучи. Проигрывает тот, кто не может ходить. Кто выигрывает при правильной игре?

109. На столе лежат 12 монет орлами вверх. Разрешается перевернуть несколько последовательно лежащих монет, если самая правая из них – орёл. Проигрывает тот,кто не может ходить. Найти нимбер этой игры.