Кружок в Хамовниках. 9 класс

Серия 13. Немного комбинаторики. 01.12

93. На доске 100×100 отметили несколько клеток так, что каждая отмеченная клетка единственная либо в своей сточке, либо в своём столбце. Какие наибольшее количество клеток могло быть отмечено?

94. Имеются чашечные весы и 100 монет, среди которых несколько (больше 0, но меньше 99) фальшивых монет. Все фальшивые весят одинаково, все настоящие тоже весят одинаково, при этом фальшивая монета легче настоящей. Можно делать взвешивание на весах, заплатив перед взвешиванием одну из монет. Докажите, что можно с гарантией обнаружить настоящую монету.

95. На плоскости провели 8 прямых, никакие две из которых не параллельны. Какое наибольшее число равнобедренных треугольников со сторонами, лежащими на этих прямых, могло образоваться?

96. За круглым столом сидят 30 человек – рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что у каждого из них за этим же столом есть ровно один друг, причем у рыцаря этот друг – лжец, а у лжеца этот друг – рыцарь (дружба всегда взаимна). На вопрос "Сидит ли рядом с вами ваш друг?"сидевшие через одного ответили "Да". Сколько из остальных могли также ответить "Да"?

97. Дан квадрат $n \times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате 2×2 одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную – в зелёный, а каждую зелёную – в белый. При каких n за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами?

98. Есть n мудрецов и неограниченный запас колпаков каждого из n различных цветов. Мудрецы одновременно закрывают глаза и каждому надевают на голову какой-то колпак (например, все надетые колпаки могут оказаться одного цвета). Мудрецы откры-вают глаза. Каждый видит, какие колпаки надеты на остальных, но не видит своего. После этого каждый мудрец пытается уга-дать, какого цвета его колпак, записав свою гипотезу на бумажке втайне от остальных. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться о совместных действиях таким образом, чтобы в любом случае хотя бы один из них угадал цвет своего колпака

99. Существует ли такое A — подмножество неотрицательных целых чисел — что любое целое неотрицательное число единственным образом представимо в виде $x + 2y$, где x и y из A? (x и y могут быть равны.)

100. В графе 20 вершин и нет треугольников. Докажите, что наибольшее количество рёбер, которое может быть в этом графе, равно 100.