Серия 11. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

Для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ имеет место неравенство

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

75. Тождество Лагранжа.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \sum_{i<k} (a_i b_k - a_k b_i)^2.$$

76. Для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ докажите неравенство

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

77. Докажите, что для всех вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполнены неравенства
а) $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$;
б) $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n \leqslant x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$.

78. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – положительные числа. Докажите неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k}\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2.$$

79. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – положительные числа. Докажите неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k b_k}\right) \geqslant 4n^2.$$

80. Для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ докажите неравенство

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(a_1^7 + a_2^7 + \cdots + a_n^7) \geqslant (a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3)(a_1^5 + a_2^5 + \cdots + a_n^5).$$

81. Пусть $P(x)$ – многочлен с положительными коэффициентами, $P(1) = 1$. Докажите, что для любого положительного x выполнено $P(x)P(1/x) \geqslant 1$.

82. Для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$ и $b_1, b_2, \ldots b_n$ докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geqslant \frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i}.$$

83. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geqslant 2.$$

84. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geqslant \frac{2}{3}.$$

85. Сумма положительных a, b, c, d равна 4. Докажите, что

$$\frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geqslant 2.$$