*Кружок в Хамовниках. 9 класс*

# Серия 10. Ориентированные углы. 23.10

**Определение.** Ориентированным углом между прямыми $l$ и $m$ называется такой угол, на который нужно против часовой стрелки повернуть прямую $l$, чтобы она стала параллельна прямой $m$. Обозначается ориентированный угол через $\angle(l, m)$. Углы, отличающиеся на кратное 180 число градусов, считаются равными.

**Упражнения:**

1. $\angle(l, m) = -\angle(m, l)$.
2. $\angle(l, m) + \angle(m, k) = \angle(l, k)$.
3. $\angle(AC, CB) = \angle(AD, DB) \Leftrightarrow$ точки $A$, $B$, $C$ и $D$ лежат на одной окружности.
4. $\angle(l, m) = \angle(l, k) \Leftrightarrow m \parallel k$.

**65.** а) Две окружности пересекаются в точках $P$ и $Q$. Через $P$ проходит прямая $AB$, причём $A$ лежит на первой окружности, а $B$ — на второй. Через $Q$ проходит прямая $CD$, причём $C$ лежит на первой окружности, а $D$ — на второй. Докажите, что $AC \parallel BD$. б) Дан вписанный шестиугольник $ABCDEF$. Пусть прямые $AB$ и $DE$ пересекаются в точке $Q$, прямые $BC$ и $EF$ — в точке $P$, а $CD$ с $FA$ — в точке $R$. Проведем описанную окружность треугольника $PCF$ и продлим прямые $CD$ и $FA$ до вторичного пересечения с этой окружностью в точках $U$ и $V$ соответственно. Докажите, что соответственные стороны треугольников $AQD$ и $VPU$ параллельны. в) Выведите из этого, что точки $P$, $Q$ и $R$ лежат на одной прямой (**теорема Паскаля**).

**66.** Даны окружности $S_1$, $S_2$ и $S_3$, проходящие через точку $X$. Вторая точка пересечения окружностей $S_1$ и $S_2$ — точка $P$, $S_2$ и $S_3$ — точка $Q$, $S_3$ и $S_1$ — точка $R$. На окружности $S_1$ выбрана произвольная точка $A$. Вторая точка пересечения прямой $AP$ с $S_2$ — точка $B$, прямой $AR$ с $S_3$ — точка $C$. Докажите, что $B$, $C$ и $Q$ лежат на одной прямой.

**67.** На окружности даны точки $A$, $B$, $C$, $D$. $M$ —середина дуги $AB$. Обозначим точки пересечения хорд $MC$ и $MD$ с хордой $AB$ через $E$ и $K$. Докажите, что точки $K$, $E$, $C$ и $D$ лежат на одной окружности.

**68.** Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая пересекает его стороны $AB$, $BC$, $CD$ и $AD$ в различных точках $E$, $F$, $G$, $H$ соответственно. Описанные окружности треугольников $AEF$ и $AGH$ пересекаются вторично в точке $P$, а описанные окружности треугольников $CEF$ и $CGH$ пересекаются вторично в точке $Q$. Докажите, что прямая $PQ$ делит отрезок $BD$ пополам.

**69.** Даны 4 прямые общего положения. Всеми возможными способами выкидывается одна из них, и берётся описанная окружность оставшегося треугольника. Докажите, что четыре таких окружности проходят через одну точку. Эта точка называется **точкой Микеля** для этой четвёрки прямых (или для четырёхугольника, образованного этими прямыми).

**70.** В треугольнике $ABC$ вписанная окружность с центром $I$ касается его сторон $AB$ и $BC$ в точках $C_1$ и $A_1$ соответственно. Прямая $AI$ пересекает прямую $A_1C_1$ в точке $K$. а) Докажите, что угол $CKA$ прямой. б) Докажите, что точка $K$ лежит на средней линии

треугольника $ABC$ параллельной стороне $AB$. в) Окружность с центром $O$ вписана в четырёхугольник $ABCD$ и касается его не параллельных сторон $BC$ и $AD$ в точках $E$ и $F$ соответственно. Пусть прямая $AO$ и отрезок $EF$ пересекаются в точке $K$, прямая $DO$ и отрезок $EF$ — в точке $N$, а прямые $BK$ и $CN$ — в точке $M$. Докажите, что точки $O$, $K$, $M$ и $N$ лежат на одной окружности.

**71.** Окружности $\omega$ и $\gamma$ касаются друг друга внутренним образом в точке $A$, причём $\gamma$ находится внутри $\omega$. Хорда $BC$ окружности $\omega$ касается $\gamma$ в точке $P$. Прямые $AB$ и $AC$ вторично пересекают $\gamma$ в точках $B'$ и $C'$ соответственно. а) Докажите, что прямые $B'C'$ и $BC$ параллельны. (подсказка: воспользуйтесь тем, что у обеих окружностей в точке $A$ общая касательная) б) (**Лемма Архимеда**) Докажите, что прямая $AP$ проходит через середину дуги $BC$ окружности $\omega$, не содержащей точку $A$.

**72.** Точки $O_1$ и $O_2$ — центры соответственно описанной и вписанной окружностей равнобедренного треугольника $ABC$ ($AB = BC$). Окружности, описанные около треугольников $ABC$ и $O_1O_2A$, пересекаются в точках $A$ и $D$. Докажите, что прямая $BD$ касается окружности, описанной около треугольника $O_1O_2A$.

**73.** В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $BB_1$. Из точки $B_1$ восстанавливается перпендикуляр к стороне $BC$ и продлевается до пересечения с дугой $AC$ описанной окружности в точке $K$. Перпендикуляр из $B$ на $AK$ пересекает $AC$ в точке $L$. Докажите, что $L$, $K$ и середина дуги $AC$ лежат на одной прямой.

**74.** Дана треугольник $ABC$ и внутри него точка $P$, отличная от точки пересечения высот. а) Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон треугольников $ABP$, $BCP$, $CAP$, $ABC$ проходят через одну точку. б) Докажите, что описанная окружность педального треугольника точки $P$ также проходит через эту точку.