Кружок в Хамовниках. 9 класс

Серия 1. Немного о простых числах. 15.09

Введём обозначения: p_n – n-ое по величине простое число, $\pi(k)$ – количество простых чисел не превосходящих k, $P(n)$ — произведение простых чисел, не превосходящих n.

1. а) Вспомите доказательство Евклида бесконечности множества простых чисел.
б) Докажите, что $p_n < 2^{2^n} + 1$

Наша цель сегодня доказать оценку получше, а именно $p_n < 2^{n+1}$

Предположим, что $\pi(2^{n+1}) = l \leqslant n - 1$.

Назовём число *свободным от квадратов*, если оно не делится ни на какой квадрат простого числа.

2. а) Докажите, что чисел, не превосходящих 2^{n+1} и свободных от квадратов не более 2^l.
б) *(немного в сторону)* Докажите, что таких чисел меньше 2^l.

Условие пункта б) можно переформулировать более явно: $P(2^{n+1}) > 2^{n+1}$.

3. Докажите, что $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{3}{4}$.

4. Сделайте вывод из предыдущей задачи и получите противоречие с предположением $l < n$.

Итак, мы доказали, что $p_n < 2^{n+1}$.

Школьными, но сложными методами можно доказать **постулат Бертрана:** *для любого натурального n между числами n и $2n$ содержится хотя бы одно простое число.*

Открытая проблема: *верно ли, что между n^2 и $(n+1)^2$ обязательно найдётся простое число?*

5. *(Всероссийская олимпиада школьников).* Решите уравнение $P(n) = 2n + 16$

6. Докажите, что $P(n) > n^{100}$ для достаточно больших n.

7. Докажите, что а) $P(2n)/P(n) < 2^{2n}$
б) $P(2^n) < 2^{2^{n+1}}$.

Более подробные размышления над последним результатом позволяют понять, что простые числа встречаются и "не очень часто".

На самом деле верен *асимптотический закон распределения простых чисел*, а именно, что $p_n \sim n \ln n$.