Задача №255.

1. Пусть *M* и *N* – точки касания вписанной окружности со сторонами *BC* и *BA* треугольника *ABC*, *K* – точка пересечения биссектрисы угла А с прямой *MN*. Докажите, что $\angle AKC = 90^\circ$.

2. Докажите, что точка *K* лежит на средней линии треугольника *ABC*, параллельной стороне *AB*.

Случаи вневписанных окружностей.

3. А) Пусть *M* и *N* – точки касания вневписанной окружности с продолжениями сторон *BC* и *BA* треугольника *ABC*, *K* – точка пересечения биссектрисы внешнего угла *A* с прямой *MN*. Докажите, что $\angle AKC = 90^\circ$.

Б) Докажите, что точка *K* лежит на средней линии треугольника ABC, параллельной стороне *AB*.

4. А) Пусть *M* и *N* – точки касания вневписанной окружности со стороной *AC* и продолжением стороны *BC* треугольника ABC, *K* – точка пересечения биссектрисы внешнего угла *A* с прямой *MN*. Докажите, что $\angle AKB = 90^\circ$.

Б) Докажите, что точка *K* лежит на средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AC.

Задачи для самостоятельного решения.

1. (ММО, 1999 год). Вписанная окружность треугольника *ABC* (*AB*>*BC*) касается сторон *AB* и *AC* в точках *P* и *Q* соответственно, *RS* – средняя линия, параллельная стороне *AB* , *T* – точка пересечения прямых *PQ* и *RS* . Докажите, что точка *T* лежит на биссектрисе угла *B* треугольника *ABC* .

2. (ММО, 1994 год). А) В треугольнике *ABC* провели биссектрисы углов *A* и *C* . Точки *P* и *Q* – основания перпендикуляров, опущенных из вершины *B* на эти биссектрисы. Докажите, что отрезок *PQ* параллелен стороне *AC* .

Б) Докажите, что условие выполняется и для биссектрис внешних углов.

3. (Олимпиада им. Шарыгина, заочный тур, 2009, Протасов В.Ю.)

Дан треугольник *ABC*. Из вершин *B* и *C* опущены перпендикуляры *BM* и *CN* на биссектрисы углов *C* и *B* соответственно. Докажите, что прямая *MN* пересекает стороны *AC* и *AB* в точках их касания со вписанной окружностью.

4. (ПМО, 1999. Бахарев Ф.). В неравнобедренном треугольнике *ABC* проведены биссектрисы AA_1 и CC_1, кроме того, отмечены середины *K* и *L* сторон *AB* и *BC* соответственно. Точка *P* – основание перпендикуляра, опущенного из вершины *A* на прямую CC_1, а точка *Q* – основание перпендикуляра, опущенного из вершины *C* на прямую AA_1. Докажите, что прямые *KP* и *LQ* пересекаются на стороне *AC*.

5. (Турнир Савина, 2014) Биссектрисы AA_1, CC_1 треугольника *ABC* пересекаются в точке *I*. A_0, C_0 – середины сторон *BC*, *BA* соответственно. Прямая A_0C_0 пересекает прямые AA_1, CC_1 в точках A_2, C_2. Докажите, что ортоцентр треугольника A_2IC_2 лежит на прямой *AC*.

6. (региональный этап всероссийской олимпиады по математике, 2013, Н.Агаханов) Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник *ABC* с гипотенузой *AB*, касается его сторон *BC*, *AC*, *AB* в точках A_1, B_1, C_1. Пусть B_1H – высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка *H* лежит на биссектрисе угла *CAB*.

7. (Международная математическая олимпиада, 2012). Дан треугольник *ABC*. Точка *J* является центром вневписанной окружности, соответствующей вершине *A*. Эта вневписанная окружность касается отрезка *BC* в точке *M*, прямых *AB* и *AC* в точках *K* и *L* соответственно. Прямые *LM* и *BJ* пересекаются в точке *F*, а прямые *KM* и *CJ* пересекаются в точке *G*. Пусть *S* – точка пересечения прямых *AF* и *BC*, а *T* – точка пересечения прямых *AG* и *BC*. Докажите, что точка *M* является серединой отрезка *ST*.

8. А) (ПМО, 2000.Берлов С.). Вневписанная окружность треугольника *ABC* касается его стороны *BC* в точке *K*, а продолжения стороны *AB* – в точке *L*. Другая вневписанная окружность касается продолжений сторон *AB* и *BC* в точках *M* и *N* соответственно. Прямые *KL* и *MN* пересекаются в точке *X*. Докажите, что *CX* – биссектриса угла *ACN*.

Б) (ПМО, 2000.Берлов С.). Одна из вневписанных окружностей треугольника *ABC* касается стороны *AB* и продолжений сторон *CA* и *CB* в точках C_1, B_1, A_1 соответственно. Другая вневписанная окружность касается стороны *AC* и продолжений сторон *BA* и *BC* в точках B_2, C_2, A_2 соответственно. Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке P, прямые A_1C_1 и A_2C_2 – в точке *Q*. Докажите, что *A*, *P* и *Q* лежат на одной прямой.

В) К двум окружностям провели общую внешнюю и общую внутреннюю касательную. Докажите, что прямая, соединяющая две точки касания на первой окружности и прямая, соединяющая две точки касания на второй окружности, пересекаются на линии центров под прямым углом.

Г) Докажите, что точки *P* и *Q* (см. пункт б) лежат на средних линиях треугольника ABC.

Д) Пусть A', B', C' – точки касания вписанной окружности (см. пункт б). Докажите, что $A'C'$ и A_1C_1 пересекаются на средней линии треугольника *ABC*.

9. (Задачник «Кванта», 1990, Л. Емельянов) Дан треугольник *ABC*. На продолжении стороны *BC* за точку *C* выбирается точка *X*. Окружности, вписанные в треугольники *ABX* и *ACX*, пересекаются в точках *P* и *Q*. Докажите, что все прямые *PQ* проходят через некоторую точку, не зависящую от положения точки *X*.

10. В треугольнике *ABC* выполняется равенство *3AC = AB + BC*. Вписанная в треугольник окружность касается сторон *AB* и *BC* в точках *K* и *L* соответственно; *DK* и *EL* – ее диаметры. Докажите, что точки пересечения прямых *AE* и *CD* с прямой *KL* равноудалены от середины отрезка *AC*.