Вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями.
Часть 1. Конструкция.

В задачах рассматривается четырехугольник *ABCD*, вписанный в окружность с центром *O* и радиусом *R*. Его диагонали *AC* и *BD* – перпендикулярны и пересекаются в точке *P*.

1. Докажите, что $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$.
2. Докажите, что расстояние от точки *O* до стороны *AB* равно половине длины *CD*.

3. Через вершины вписанного четырехугольника проведены касательные к его описанной окружности. Докажите, что точки их попарного пересечения являются вершинами вписанного четырехугольника т. и т. т., когда диагонали исходного четырехугольника взаимно перпендикулярны.

4. Докажите, что прямая, проведенная из точки *P* перпендикулярно стороне *BC* делит сторону *AD* пополам.

5. А) Докажите, что $|AP|^2 + |BP|^2 + |CP|^2 + |DP|^2 = 4R^2$;
Б) Найдите сумму квадратов сторон этого четырехугольника.
6. А) Докажите, что середины сторон четырехугольника лежат на одной окружности.
Б) Докажите, что проекции точки *P* на стороны четырехугольника (*основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны*) лежат на той же окружности.
В) Докажите, что точка *P* является центром окружности, вписанной в четырехугольник, вершинами которого являются проекции точки *P* на стороны *ABCD*.
Г) Докажите, что стороны четырехугольника, образованного проекциями точки Р на стороны *ABCD* (см. Б, В), параллельны сторонам четырехугольника, образованного попарным пересечением касательных в вершинах четырехугольника *ABCD* (см.№3).
Д) Докажите, что эти четырехугольники гомотетичны.

Часть 2. Задачи.

1. *ABCD* – вписанный четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны. Из вершин *A* и *B* опущены перпендикуляры на *CD*, пересекающие прямые *BD* и *AC* в точках *K* и *L* соответственно. Докажите, что *AKLB* – ромб.
2. (*точка Монжа*) А) Докажите, что перпендикуляры, проведенные из середин сторон к противолежащим сторонам вписанного четырехугольника пересекаются в одной точке.
Б) Что это за точка, если диагонали четырехугольника перпендикулярны?
3. В окружность *Ω* вписан четырёхугольник *ABCD*, диагонали *AC* и *BD* которого перпендикулярны. На сторонах *AB* и *CD* во внешнюю сторону как на диаметрах построены дуги *α* и *β*. Рассмотрим две луночки, образованные окружностью *Ω* и дугами *α* и *β*. Докажите, что максимальные радиусы окружностей, вписанных в эти луночки, равны.
4. А) Четырехугольник *ABCD*, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность с центром *O*. Докажите, что ломаная *AOC* делит его на две равновеликие части.
Б) *ABCD* – вписанный четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны. Докажите, что площадь четырехугольника ABCD равна $S = \frac{1}{2}\left(AB \cdot CD + BC \cdot AD\right)$.

5. Четырехугольник *KLMN* вписанный и описанный одновременно; *A* и *B* – точки касания вписанной окружности со сторонами *KL* и *LM*. Докажите, что $AK \cdot BM = r^2$ где *r* – радиус вписанной окружности.
6. А) Внутри окружности зафиксирована точка *P*. *C* – произвольная точка окружности, *AB* – хорда, проходящая через точку *P* и перпендикулярная отрезку *PC*. Точки *X* и *Y* являются проекциями точки *P* на прямые *AC* и *BC*. Докажите, что все отрезки *XY* касаются одной и той же окружности.
Б) Дана окружность и точка *P* внутри неё. Два произвольных перпендикулярных луча с началом в точке *P* пересекают окружность в точках *A* и *B*. Точка *X* является проекцией точки *P* на прямую *AB*, *Y* – точка пересечения касательных к окружности, проведённых через точки *A* и *B*. Докажите, что все прямые *XY* проходят через одну и ту же точку.