Вневписанная окружность 1.
Увидеть вневписанную окружность.
Биссектриса как г.м.т. Угол между биссектрисами.

Определение. ***Окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон, называется вневписанной*** для этого треугольника.

Сколько вневписанных окружностей у любого треугольника? Где лежат их центры? Что является их радиусами?

Таким образом: 1) ***точка пересечения биссектрис двух внешних углов треугольника лежит на биссектрисе внутреннего угла этого треугольника***; 2) ***существуют ровно четыре точки, равноудаленные от прямых, содержащих стороны треугольника***.

Базовая задача. Биссектрисы внутренних (внешних) углов B и C пересекаются в точке O. Найдите угол BOC, если $\angle BAC = \alpha$. [$90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ и $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ соответственно]

Докажите, что точка O, лежащая на биссектрисе угла A, является центром вписанной (вневписанной) окружности, если она лежит в одной (разных) полуплоскости с A относительно BC и $\angle BOC = 90 + \frac{1}{2}\angle A$ ($\angle BOC = 90 - \frac{1}{2}\angle A$).

Задачи для самостоятельного решения

1. В треугольнике ABC $\angle A = 45°$, BH – высота, точка K лежит на стороне AC, причем $BC = CK$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABK совпадает с центром вневписанной окружности треугольника BCH.

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE. Оказалось, что DE – биссектриса треугольника ADC. Найдите угол BAC.

3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно так, что $\angle BAM = \angle CKM = 30°$. Найдите $\angle AKD$.

4. На равных сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $AC = CM$ и $MN = NB$. Высота треугольника, проведенная из вершины B, пересекает отрезок CM в точке H. Докажите, что NH – биссектриса угла MNC.

5. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки M и N так, что $\angle MAN = 45°$. AH – высота треугольника AMN. Докажите, что $AH = AB$.

6. Дан правильный треугольник ABC и прямая l проходящая через его центр. Точки пересечения этой прямой со сторонами AB и AC отразили относительно середин этих сторон. Докажите, что прямая, проходящая через получившиеся точки, касается вписанной окружности треугольника ABC.

7. Точка E на стороне AD квадрата $ABCD$ такова, что $\angle AEB = 60°$. Биссектриса угла ABE, отразившись от стороны AD, пересекает BE в точке F . Докажите, что точка F лежит на диагонали квадрата.

8. В треугольнике ABC с углом A, равным 120°, проведены биссектрисы AM, BL и CK. Докажите, что треугольник MKL – прямоугольный.

9. На полосу наложили квадрат, сторона которого равна ширине полосы, причем так, чтобы его граница пересекала границу полосы в 4 точках. Докажите, что две прямые, проходящие накрест через эти точки пересекаются под углом 45°.

10. Углы, прилежащие к одной из сторон треугольника, равны 15° и 30°. Какой угол образует с этой стороной проведенная к ней медиана?

11. В треугольнике ABC угол A равен 60°. L_1, L_2 и L_3 – основания биссектрис AL_1, BL_2 и CL_3. Точка P симметрична точке A относительно прямой L_2L_3. Докажите, что точка P лежит на прямой BC.

12. На сторонах AB и CD квадрата $ABCD$ взяты точки K и M соответственно, а на диагонали AC – точка L так, что $ML = KL$. Пусть P – точка пересечения отрезков MK и BD. Найдите угол KPL.

13. Проведем через основание биссектрисы угла A разностороннего треугольника ABC отличную от стороны BC касательную к вписанной в треугольник окружности. Точку ее касания с окружностью обозначим через K_a. Аналогично построим точки K_b и K_c. Докажите, что три прямые, соединяющие точки K_a, K_b и K_c с серединами сторон BC, CA и AB соответственно, имеют общую точку, *причем эта точка лежит на вписанной окружности*.