Три окружности в треугольнике.

1. Полезные факты.

1) Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, AC и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Тогда $AB_1 = p - BC$, где p – полупериметр треугольника ABC.

2) Докажите, что в прямоугольной трапеции ABCD ($\angle A = \angle B = 90^\circ$) середина боковой стороны CD равноудалена от вершин A и B.

2. С помощью 1 факта решите задачу 1в.

Задачи.

На стороне *AC* треугольника *ABC* взята точка *D*. Пусть I, I_1, I_2 – центры окружностей *w*, w_1 и w_2, вписанных в треугольники *ABC*, *ABD* и *BCD* соответственно, а *L*, *M* и *K* – точки касания данных окружностей со стороной *AC*. Докажите, что:

1. а) $\angle I_1BI_2 = \frac{1}{2}\angle ABC$; б) $\angle I_1DI_2 = 90^\circ$; в) $ML = DK$; г) окружности w_1 и w_2 касаются т. и т.т., когда *D* совпадает с *L*.

2. (*5 Соросовская олимпиада*) Точки I_1, L, D, I_2 лежат на одной окружности.

3. *(Московская устная олимпиада по геометрии, 2009)* Фиксированы две окружности w_1 и w_2, одна их внешняя касательная *l* и одна их внутренняя касательная *m*. На прямой *m* выбирается точка *X*, а на прямой *l* строятся точки *Y* и *Z* так, что *XY* и *XZ* касаются w_1 и w_2 соответственно, а треугольник *XYZ* содержит окружности w_1 и w_2. Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники *XYZ*, лежат на одной прямой.

4. Пусть *BD* – высота треугольника *ABC*. Докажите, что:

А) $I_1L = I_2L$.

Б) *(Всероссийская олимпиада по геометрии, 2010, заочный тур)* Вершина *P* квадрата I_1LI_2P лежит на прямой *BD*.

5. Пусть *BD* – высота треугольника *ABC* и $\angle ABC = 90^\circ$. Докажите, что:

А) *P* – центр окружности, описанной около треугольника I_1BI_2.

Б) $I_1L \perp AB, I_2L \perp BC$.

В) $I_1L = IL = I_2L$.

Г) Точки A, I_1, I_2, C лежат на одной окружности.

6. Пусть *BD* – высота треугольника *ABC*. Докажите, что $\angle ABC = 90^\circ$ т. и т.т., когда $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

Дополнительные задачи.

1. (*Московская математическая олимпиада, 1994*) *D* – точка на стороне *BC* треугольника *ABC*. В треугольники *ABD*, *ACD* вписаны окружности, и к ним проведена общая внешняя касательная (отличная от *BC*), пересекающая *AD* в точке *K*. Докажите, что длина отрезка *AK* не зависит от положения точки *D* на *BC*.

2. *(Московская устная олимпиада по геометрии, 2006)* Дан произвольный треугольник *ABC*. Постройте прямую, проходящую через вершину *B* и делящую его на два треугольника, радиусы вписанных окружностей которых равны.

3. (*Всероссийская олимпиада по математике, 2007*) Точка *D* на стороне *BC* треугольника *ABC* такова, что радиусы вписанных окружностей треугольников *ABD* и *ACD* равны. Докажите, что радиусы окружностей, вневписанных в треугольники *ABD* и *ACD* , касающихся соответственно отрезков *BD* и *CD*, также равны.

4. *(Всероссийская олимпиада по геометрии, 2012)* В треугольнике *ABC* провели биссектрису *CL*. В треугольники *CAL* и *CBL* вписали окружности, которые касаются прямой *AB* в точках *M* и *N* соответственно. Затем все, кроме точек *A*, *L*, *M* и *N*, стерли. С помощью циркуля и линейки восстановите треугольник.

5. *(Л. Емельянов)* В треугольнике ABC провели медиану *BM*. Пусть точки I_1 и I_2 – центры окружностей, вписанных в треугольники *ABM* и *CBM*, а точки J_1 и J_2 – центры вневписанных окружностей этих треугольников, касающихся сторон *AB* и *BC* соответственно. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

6. *(Всероссийская олимпиада по математике, 2011)* Дан неравнобедренный треугольник *ABC*. Пусть *N* – середина дуги *BAC* его описанной окружности, а *M* – середина стороны *BC*. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников *ABM* и *ACM* соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, *A*, *N* лежат на одной окружности.