Четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Теорема Карно.

1. Докажите, что ***разность квадратов наклонных равна разности квадратов их проекций***.

2. Найдите ***г.м.т. М, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна***. [прямая, перпендикулярная АВ]

3. Докажите, что ***диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов его противолежащих сторон***.

4. ***Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямых ВС, СА и АВ соответственно. Перпендикуляры к соответствующим сторонам треугольника, восстановленные в точках A_1, B_1, C_1, пересекаются в одной точке т. и т. т., когда***

$AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2$. ***(теорема Карно)***

Можно ли обобщить теорему Карно на многоугольник?

Задачи.

1. Рассмотрим два различных четырёхугольника с соответственно равными сторонами. Докажите, что если у одного из них диагонали перпендикулярны, то и у другого тоже.

2. Даны четыре палочки и известно, что из них можно составить четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что из них можно составить четырехугольник с двумя прямыми углами.

3. Циркулем и линейкой разбейте данный треугольник на два меньших треугольника с одинаковой суммой квадратов сторон.

4. Внутри прямоугольника *ABCD* взята точка *M*. Докажите, что существует выпуклый четырехугольник с перпендикулярными диагоналями длины *AB* и *BC*, стороны которого равны *AM*, *BM*, *CM*, *DM*.

5. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке, используя: а) свойство и признак четырехугольника с перпендикулярными диагоналями; б) теорему Карно.

6. А) Докажите обобщение теоремы Карно: перпендикуляры, опущенные из произвольных точек плоскости *A*', *B*' и *C*' на прямые *BC, CA* и *AB* соответственно, лежащие в этой же плоскости, пересекаются в одной точке т. и т. т., когда выполняется равенство $|A'C|^2 + |C'B|^2 + |B'A|^2 = |A'B|^2 + |C'A|^2 + |B'C|^2$.

Б) Дан треугольник *ABC*. Точки A_1, B_1, C_1 таковы, что $AB_1 = AC_1, BC_1 = BA_1, CA_1 = CB_1$. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на прямые BC, CA, AB соответственно, пересекаются в одной точке.

В) На плоскости даны шесть точек *A* , *B, C*, A_1 , B_1 и C_1. Докажите, что если перпендикуляры, опущенные из точек A_1 , B_1 и C_1 на прямые *BC* , *AC* и *AB* соответственно, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из точек *A* , *B* и *C* на прямые соответственно B_1C_1 , A_1C_1 и A_1B_1 , также пересекаются в одной точке.

7. Дан шестиугольник *ABCDEF*, в котором *AB* = *BC*, *CD* = *DE*, *EF* = *FA*, а углы *A* и *C* — прямые. Докажите, что прямые *FD* и *BE* перпендикулярны.

8. А) Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вневписанных окружностей треугольника на его стороны, пересекаются в одной точке.

Б) Найдите еще один способ решения данной задачи. Что это за точка?

9. Дан равнобедренный треугольник *ABC* с основанием *AC*. *H* – точка пересечения высот. На сторонах *AB* и *BC* выбраны точки *M* и *K* и соответственно так, что $\angle KMH = 90°$. Докажите, что из отрезков *AK*, *CM* и *MK* можно сложить прямоугольный треугольник.

10. Четыре перпендикуляра из вершин пятиугольника на противоположные стороны пересекаются в одной точке. Докажите, что пятый тоже проходит через эту точку.

11. А) Около треугольника *ABC* описали окружность. A_1 — точка пересечения ее с прямой, параллельной *BC* и проходящей через вершину *A*. Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Из точек A_1, B_1 и C_1 опустили перпендикуляры на прямые *BC*, *CA* и *AB* соответственно. Докажите, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке.

Б) Найдите еще один способ решения данной задачи. Что это за точка?

12. На сторонах треугольника АВС построены прямоугольники $ABB_1A_1, BCC_2B_2, CAA_2C_1$. Докажите, что серединные перпендикуляры к отрезкам A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

13. Пусть *ABC* – равносторонний треугольник, *P* – произвольная точка. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вписанных окружностей треугольников *PAB*, *PBC* и *PCA* на прямые *AB*, *BC* и *CA* соответственно, пересекаются в одной точке.

14. Докажите, что перпендикуляры, восставленные из оснований биссектрис треугольника, пересекаются в одной точке т. и т. т., когда треугольник равнобедренный.

15. В треугольнике *ABC* точка *O* – центр описанной окружности, *I* – центр вписанной. Точки A', B' на лучах BC, AC таковы, что $A'B = AB = AB'$. Докажите, что $A'B' \perp OI$.

16. Точки A_1 , B_1 и C_1 – середины сторон *BC, AC* и *AB* треугольника *ABC* соответственно. B_2 – основание перпендикуляра из точки *B* на A_1C_1. Аналогично определены A_2 и C_2. Докажите, что A_1 , B_1 и C_1 на прямые B_2C_2 , A_2C_2 и A_2B_2 соответственно, пересекаются в одной точке.