

### Биссектриса делит дугу пополам.

1.  $AM$  – биссектриса треугольника  $ABC$ . Точка  $D$  принадлежит стороне  $AC$ , причём  $\angle DMC = \angle BAC$ . Докажите, что  $BM = MD$ .
2. Диагонали выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ ,  $AB = BC$ ,  $DB$  — биссектриса угла  $D$ ,  $\angle ABC = 100^\circ$ ,  $\angle BEA = 70^\circ$ . Найдите угол  $CAD$ .
3. Постройте треугольник по углу и двум отрезкам, на которые биссектриса этого угла разбивает противоположную сторону треугольника.
4. Две окружности проходят через вершину угла и точку его биссектрисы. Докажите, что отрезки, отсекаемые ими на сторонах угла, равны.
5. Из точки  $A$ , расположенной вне окружности, проведены две касательные  $AM$  и  $AN$  ( $M$  и  $N$  — точки касания) и секущая, пересекающая окружность в точках  $P$  и  $Q$ . Пусть  $L$  — середина  $PQ$ . Докажите, что  $\angle MLA = \angle NLA$ .
6. В треугольнике  $ABC$  стороны  $AC$  и  $BC$  не равны. Докажите, что биссектриса угла  $C$  делит пополам угол между медианой и высотой, проведёнными из вершины  $C$ , тогда и только тогда, когда  $\angle C = 90^\circ$ .
7. Объясните, как построить треугольник, если даны: а) точки пересечения описанной около этого треугольника окружности с продолжениями медианы, биссектрисы и высоты, проведенными из одной вершины. б) медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины.
8. Постройте треугольник  $ABC$  по его инцентру, середине стороны  $BC$  и основанию биссектрисы, проведенной из вершины угла  $A$ .
9. На доске была нарисована окружность с отмеченным центром, вписанный в нее четырехугольник, и окружность, вписанная в него, также с отмеченным центром. Затем стерли четырехугольник (сохранив одну вершину) и вписанную окружность (сохранив ее центр). Восстановите какую-нибудь из стертых вершин четырехугольника, пользуясь только линейкой и проведя не более шести линий.

### Дополнительные задачи.

1. На биссектрисе данного угла фиксирована точка. Рассматриваются всевозможные равнобедренные треугольники, у которых вершина находится в этой точке, а концы оснований лежат на разных сторонах этого угла. Найти геометрическое место середин оснований таких треугольников.
2. Восстановите треугольник по точке пересечения высот и основаниям медианы и биссектрисы, проведенных к одной из сторон.
3. В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $BB_1$  и  $CC_1$ . Известно, что центр описанной окружности треугольника  $BB_1C_1$  лежит на прямой  $AC$ . Найдите угол  $C$  треугольника.
4. В треугольнике  $ABC$  углы при вершинах  $B$  и  $C$  равны  $40^\circ$ ,  $BD$  – биссектриса угла  $B$ . Докажите, что  $BD + DA = BC$ .
5. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BD$  (точка  $D$  лежит на отрезке  $AC$ ). Прямая  $BD$  пересекает окружность  $\Omega$ , описанную около треугольника  $ABC$ , в точках  $B$  и  $E$ . Окружность  $\omega$ , построенная на отрезке  $DE$  как на диаметре, пересекает окружность  $\Omega$  в точках  $E$  и  $F$ . Докажите, что прямая, симметричная прямой  $BF$  относительно прямой  $BD$ , содержит медиану треугольника  $ABC$ .