Вписанная окружность и замечательная прямая.

Пусть I – инцентр треугольника ABC, M – центроид, K_1 – точка касания вписанной окружности со стороной BC, M_1 – середина BC, H_1 – основание высоты, проведенной из вершины A, T_1 – точка касания вневписанной окружности со стороной BC, D – точка вписанной окружности диаметрально противоположная K_1, N – точка Нагеля, H – ортоцентр, O – центр описанной окружности.

Свойства.

1. а) Точки A, D и T_1 лежат на одной прямой.

б) Прямая T_1I делит высоту AH_1 пополам.

2. $M_1I \parallel AT_1$.

3. Прямая M_1I делит отрезок AK_1 пополам.

4. Прямая M_1I отсекает от высоты AH_1 отрезок $AQ = r$.

Задачи.

1. В прямоугольном треугольнике ABC $\left(\angle C = 90^\circ\right)$ точки T_1, I и середина AC лежат на одной прямой.

2. M_1I делит отрезок MK_1 в отношении 1:3, считая от M.

3. Прямые M_1I, T_1M и AK_1 пересекаются в одной точке.

4. а) Прямая M_1I делит периметр срединного треугольника пополам.

б) I, M и N лежат на одной прямой, причем $NM = 2MI$ (прямая Нагеля).

5. Прямая AT_1 второй раз пересекает вписанную окружность в точке P. Докажите, что M_1P касается вписанной окружности.

6. (*Московская устная олимпиада по геометрии , 2005*) Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон треугольника ABC, I – центр вписанной в него окружности. C_2 – точка пересечения прямых C_1I и A_1B_1, C_3 – точка пересечения прямых CC_2 и AB. Докажите, что прямая IC_3 перпендикулярна прямой AB.

7. Дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) с заданными положениями точек I и M. При помощи одной линейки разделите периметр этого треугольника пополам.

8. Постройте треугольник по отрезкам AH_1, AM_1 и r.

9. Восстановите треугольник ABC по:

а) точкам I, M_1 и H_1.

б) точкам I, M_1 и прямой, содержащей AH_1.

в) точкам I, M и прямой, содержащей BC.

г) точкам A, I и M.

10. (*Турнир городов*) Известно, что отрезки IO и BC параллельны. Докажите, что отрезки AO и HK_1 параллельны.

11. (*Всероссийская олимпиада по геометрии, 2012*) Докажите, что $MI = \frac{r}{3}$ тогда и только тогда, когда прямая MI перпендикулярна одной из сторон треугольника.