

Треугольники с параллельными сторонами гомотетичны.

0. А) На каждой из сторон треугольника ABC построено по прямоугольнику так, что они попарно касаются вершинами. Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника ABC с соответствующими вершинами получившегося треугольника, пересекаются в одной точке.
- Б) На каждом из оснований AD и BC трапеции $ABCD$ построены вне трапеции равносторонние треугольники. Докажите, что отрезок, соединяющий третьи вершины этих треугольников, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.
- В) В треугольнике ABC : O – центр описанной окружности, H – ортоцентр, A_1 и C_1 – середины сторон BC и AB соответственно. Докажите, что прямые AA_1 , CC_1 и OH пересекаются в одной точке.
1. А) Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Биссектриса угла A пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке A_2 . Точки B_2 и C_2 определяются аналогично. Докажите, что прямые A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.
- Б) Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Точки A_2 , B_2 , C_2 – середины дуг BAC , CBA , ACB описанной около треугольника ABC окружности. Докажите, что прямые A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.
2. А) Через вершины треугольника ABC проводятся касательные к описанной окружности, которые пересекаются в точках A_1 , B_1 и C_1 . При этом вершина A лежит на отрезке B_1C_1 , B на отрезке A_1C_1 , C на отрезке A_1B_1 . AA_2 , BB_2 и CC_2 – высоты треугольника ABC , которые пересекаются в точке H . O – центр описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что прямые A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются на прямой OH .
- Б) Пусть AA_1 , BB_1 и CC_1 – высоты остроугольного неравностороннего треугольника ABC , H – его ортоцентр, M – середина стороны AB . Касательные в точках A и B к описанной окружности треугольника ABC пересекаются в точке Z . Докажите, что прямые MH , A_1B_1 и ZC_1 пересекаются в одной точке.
3. Проведем через основание биссектрисы угла A разностороннего треугольника ABC отличную от стороны BC касательную к вписанной в треугольник окружности. Точку ее касания с окружностью обозначим через K_a . Аналогично построим точки K_b и K_c . Докажите, что три прямые, соединяющие точки K_a , K_b и K_c с серединами сторон BC , CA и AB соответственно, имеют общую точку.
4. Окружность с центром I , вписанная в треугольник ABC , касается сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Пусть I_a , I_b , I_c – центры невписанных окружностей треугольника ABC , касающихся соответственно сторон BC , CA , AB . Отрезки I_aB_1 и I_bA_1 пересекаются в точке C_2 . Аналогично, отрезки I_bC_1 и I_cB_1 пересекаются в точке A_2 , а отрезки I_cA_1 и I_aC_1 – в точке B_2 .
- а) Докажите, что прямые I_aA_1 , I_bB_1 и I_cC_1 пересекаются в одной точке.
- б) Докажите, что I является центром окружности, описанной около треугольника $A_2B_2C_2$.
5. Четырёхугольник $ABCD$ является одновременно и вписанным, и описанным, причём вписанная в $ABCD$ окружность касается его сторон AB , BC , CD и AD в точках K , L , M , N соответственно. Биссектрисы внешних углов A и B четырёхугольника пересекаются в точке K' , внешних углов B и C – в точке L' , внешних углов C и D – в точке M' , внешних углов D и A – в точке N' . Докажите, что прямые KK' , LL' , MM' и NN' проходят через одну точку.
6. А) Два треугольника имеют общую вписанную и описанную окружности. Стороны одного из них касаются вписанной окружности в точках K , L и M , стороны другого – в точках K_1 , L_1 и M_1 . Докажите, что треугольники KLM и $K_1L_1M_1$ имеют общий ортоцентр.
- Б) Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон в точках A' , B' и C' . Известно, что ортоцентры треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают. Верно ли, что ABC – правильный?
7. а) Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках B_0 и C_0 соответственно. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекают серединный перпендикуляр к биссектрисе AL в точках Q и P соответственно. Докажите, что прямые PC_0 и QB_0 пересекаются на прямой BC .
- б) В треугольнике ABC провели биссектрису AL . Точки O_1 и O_2 – центры описанных окружностей треугольников ABL и ACL соответственно. Точки B_1 и C_1 – проекции вершин C и B на биссектрисы углов B и C соответственно. Докажите, что прямые O_1C_1 и O_2B_1 пересекаются на прямой BC .
- в) Докажите, что точки, полученные в пп.а) и б), совпадают.
8. Дан треугольник ABC и точки P и Q , лежащие на его описанной окружности. Точку P отразили относительно прямой BC и получили точку P_a . Точку пересечения прямых QP_a и BC обозначим A' . Точки B' и C' строятся аналогично. Докажите, что точки A' , B' и C' лежат на одной прямой.