

Ортоцентр, середина стороны, точка пересечения касательных и ... еще одна точка!

Пусть AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного неравностороннего треугольника ABC .

Окружности ω и ω_1 , описанные около треугольников ABC (O – центр) и A_1B_1C (O_1 – центр) соответственно, вторично пересекаются в точке P . Докажите, что:

- А) Точки M (середина AB), H (ортоцентр) и P лежат на одной прямой.
Б) Окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1 проходят через точку P .
В) PM – биссектриса углов APA_1 и BPB_1 .
Г) Прямая PA проходит через точку, симметричную точке A_1 относительно прямой CH .
- А) Пусть окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1 пересекают прямые BC и AC в точках K и L соответственно. Докажите, что K, M, O и L лежат на одной прямой.
Б) Пусть окружности описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1 пересекают прямые AC и BC в точках K и L соответственно. Докажите, что K, M, O_1 и L лежат на одной прямой.
- Пусть A_1B_1 и AB пересекаются в точке S , R – середина CM . Докажите, что:
А) C, P и S лежат на одной прямой.
Б) прямые SH и CM перпендикулярны.
В) $OR \perp SC$.
- Пусть касательные в точках A и B к окружности ω пересекают прямую A_1B_1 в точках X и Y соответственно и пересекаются в точке Z . Докажите, что:
А) Окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1 проходят через точки X и Y соответственно.
Б) M – центр вписанной окружности треугольника XYZ .
- Прямые MH , A_1B_1 и ZC_1 пересекаются в одной точке.
- Прямые AP , BC и ZC_1 пересекаются в одной точке.
- А) точки Z, P и H_c (симметричная H относительно стороны AB), лежат на одной прямой.
Б) описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются в точке P .

Вспомогательные утверждения.

- Докажите, что ортоцентр треугольника – центр вписанной окружности его ортотреугольника.
- Докажите, что точка, симметричная ортоцентру относительно середины стороны AB треугольника ABC лежит на описанной окружности и диаметрально противоположна точке C .
- Докажите, что точки, симметричные ортоцентру относительно сторон треугольника ABC лежат на его описанной окружности и образуют треугольник, гомотетичный ортотреугольнику.
- Докажите, что расстояние от центра описанной окружности треугольника ABC до середины стороны AB равно половине расстояния от вершины C до ортоцентра треугольника.
- Докажите, что касательные к описанной окружности треугольника параллельны сторонам его ортотреугольника.
- Докажите, что треугольники с соответственно параллельными сторонами – гомотетичны.
- Радикальный центр.** Даны три окружности, из которых каждые две пересекаются. Докажите, что прямые, содержащие их общие хорды пересекаются в одной точке.
- Основное свойство симедианы.** Треугольник ABC вписан в окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках A и B , пересекаются в точке Z . Докажите, что прямая CZ содержит симедиану (прямую, симметричную медиане относительно биссектрисы) треугольника ABC .