Степень точки и инцентр.

Пусть *BL* – биссектриса треугольника *ABC (AB* $<$ *BC)*, *M* – середина стороны *AC*, *I* – центр вписанной окружности радиуса *r*, *O* – центр описанной окружности радиуса *R*, *W* – середина дуги *AC*, не содержащей точку *B*, *N* – середина дуги *AC*, содержащей точку *B*, I_B – центр вневписанной окружности радиуса r_b, касающейся стороны *AC*, ω – окружность, описанная около треугольника *AIC*, *P* – точка, симметричная *A* относительно *BL*.

Докажите, что:

1. А) *WA* – касательная к окружности, описанной около треугольника *BAL.*

Б) $WI^2 = WL \cdot WB = WM \cdot WN$.

2. А) *P* лежит на окружности ω .

Б) $BI \cdot BI_B = BA \cdot BC$.

В) $BQ^2 = BA \cdot BC$, где *BQ* – касательная к окружности ω .

3. А) *P* лежит на окружности, описанной около треугольника *CLW*.

Б) $BL \cdot BW = BA \cdot BC$.

4. А) $BL \cdot LW = AL \cdot LC$.

Б) Выведите из А) и 3Б) ***формулу биссектрисы***: $BL^2 = BA \cdot BC - AL \cdot LC$.

5. (Л.Емельянов) Пусть точки I_1 и I_2 – центры окружностей, вписанных в треугольники *ABM* и *CBM*, а точки J_1 и J_2 – центры вневписанных окружностей этих треугольников, касающихся сторон *AB* и *BC* соответственно. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

6. А) $\frac{r}{BI} = \frac{CW}{WN} = \frac{r_b}{BI_B}$.

Б) Докажите ***формулу Эйлера***: 1) $OI^2 = R^2 - 2Rr$; 2) $OI_B{}^2 = R^2 + 2Rr_b$.

7. А) *WI* – касательная к окружности, описанной около треугольника *MIN*.

Б) $\angle$*IMA* = $\angle$*INB*. (Бадзян, Всероссийская олимпиада, 2005, региональный этап, 9.4)

В) Прямая, содержащая общую хорду окружностей, описанных около треугольников *MIN* и *BAL,* проходит через *W*.

8. Пусть *K* – точка пересечения перпендикуляра к *BI*, проведенного в точке *I* и прямой *AC*. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из *I* на *BK* и на WK лежат на описанной окружности треугольника *ABC*.

9. (Ф. Ивлев, ММО, 2013, 10.6) Пусть *I* – центр вписанной окружности неравнобедренного треугольника *ABC*. Через A_1 обозначим середину дуги *BC* описанной окружности треугольника *ABC*, не содержащей точки *A*, а через A_2 – середину дуги *BAC*. Перпендикуляр, опущенный из точки A_1 на прямую A_2I, пересекает прямую *BC* в точке *A'*. Аналогично определяются точки *B'* и *C'*.

а) Докажите, что точки *A'*, *B'* и *C'* лежат на одной прямой.

б) Докажите, что эта прямая перпендикулярна прямой *OI*, где *O* – центр описанной окружности треугольника *ABC*.