**Прямая Симсона в задачах.**

**1.** Пусть $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ – высоты остроугольного треугольника *ABC*. Докажите, что:

А) Основания перпендикуляров, опущенных из точки $B_1$ на прямые *AB*, *BC*, $AA_1$ и $CC_1$ лежат на одной прямой.

Б) середина отрезка $B_1C_1$ лежит на этой прямой.

**2.** Окружность $\omega$, центр которой лежит на серединном перпендикуляре к стороне *AC* треугольника *ABC*, касается стороны *BC* в точке $A_0$, а продолжения стороны *AB* за точку *B* – в точке $C_0$. Докажите, что прямая $A_0C_0$ проходит через середину стороны *AC*.

**3.** Решите задачу 255 для вневписанных окружностей, используя прямую Симсона.

А) Пусть *M* и *N* – точки касания вневписанной окружности с продолжениями сторон *BC* и *BA* треугольника *ABC*, *K* – точка пересечения биссектрисы внешнего угла *A* с прямой *MN*. Докажите, что $\angle AKC = 90^\circ$.

Б) Пусть *M* и *N* – точки касания вневписанной окружности со стороной *AC* и продолжением стороны *BC* треугольника *ABC*, *K* – точка пересечения биссектрисы внешнего угла A с прямой *MN*. Докажите, что $\angle AKB = 90^\circ$.

**4.** А) Пусть $I$ – центр вписанной окружности треугольника *ABC*. Окружность, проходящая через точки *B* и $I$ пересекает *AB* и *BC* в точках *E* и *F* соответственно. Докажите, что середина отрезка *EF* лежит на прямой $A_0C_0$, где $A_0$ и $C_0$ – точки касания вписанной окружности треугольника *ABC* со сторонами *BC* и *AB* соответственно.

Б) На стороне *AC* треугольника *ABC* отметили произвольную точку *D*. Точки *E* и *F* симметричны точке *D* относительно биссектрис углов *A* и *C* соответственно. Докажите, что середина отрезка *EF* лежит на прямой $A_0C_0$, где $A_0$ и $C_0$ – точки касания вписанной окружности треугольника *ABC* со сторонами *BC* и *AB* соответственно.

В) На биссектрисе данного угла фиксирована точка. Рассматриваются всевозможные равнобедренные треугольники, у которых вершина находится в этой точке, а концы оснований лежат на разных сторонах этого угла. Найти геометрическое место середин оснований таких треугольников.

**5.** *BH*, *BL* – высота, биссектриса остроугольного треугольника *ABC* соответственно. *P* – основание перпендикуляра, опущенного из точки *A* на *BL*; *Q* – основание перпендикуляра, опущенного из точки *L* на сторону *BC*. Докажите, что точки *H*, *P* и *Q* лежат на одной прямой.

**6.** *AE* – биссектриса равнобедренного треугольника *ABC* (*AB* = *BC*). Диаметр *EO* описанной окружности треугольника *AEC* пересекает биссектрису угла *ACB* в точке *L*. Докажите, что *L* лежит на средней линии треугольника *AEC*.

**7.** В треугольнике *ABC* угол *B* равен 60°. Пусть $AA_1$ и $CC_1$ – биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине *B* относительно прямой $A_1C_1$ лежит на стороне *AC*.

**8.** А) В треугольнике *ABC* проведена биссектриса *AD* и из точки *D* опущены перпендикуляры *DB′* и *DC′* на прямые *AC* и *AB*; точка *M* лежит на прямой *B′C′*, причем *DM* ⊥ *BC*. Докажите, что точка *M* лежит на медиане $AA_0$.

Б) Окружность с центром *I*, вписанная в треугольник *ABC*, касается сторон *AC*, *AB*, *BC* в точках $B', C'$ и $A'$ соответственно. Медиана $AA_0$ треугольника пересекает $B'C'$ в точке *D*. Докажите, что точка *I* лежит на прямой $DA'$.

В) Окружность с центром *I*, вписанная в треугольник *ABC*, касается сторон *AC*, *AB*, *BC* в точках $B', C'$ и $A'$ соответственно. Обозначим через *L* – основание биссектрисы угла *A*, а через *D* – точку пересечения прямых $A'I$ и $B'C'$. Докажите, что $DL \parallel AA'$.

**9.** Рассмотрим 5 точек *A*, *B*, *C*, *D*, *E* так что *ABCD* – параллелограмм, *B*, *C*, *E* и *D* лежат на одной окружности. $A \in l$, прямая *l* пересекает отрезок *DC* в точке *F* и прямую *BC* в точке *G*. Пусть *EF* = *EG* = *EC*. Доказать, что *l* – биссектриса угла *DAB*.