Симедиана.

Основные факты.

1. Определение и антипараллельность.

А) Рассмотрим треугольник ABC, его медиану AM и его биссектрису AL. Пусть луч AS симметричен лучу AM относительно прямой AL, где S – точка пересечения этого луча с BC. Тогда отрезок AS называется ***симедианой*** треугольника ABC.

Б) *В треугольнике ABC проведен отрезок B_1C_1, антипараллельный стороне BC, с концами на сторонах AB и AC соответственно. Отрезок AS является симедианой треугольника ABC т. и т. т., когда он делит B_1C_1 пополам.*

2. Другое определение

AS – симедиана т. и т. т., когда $\frac{BS}{CS}=\frac{AB^2}{AC^2}$.

3. Гармонический четырехугольник

1. Пусть симедиана AS пересекает окружность, описанную около треугольника ABC в точке D. Тогда $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

2. Если точка D лежит на окружности, описанной около треугольника ABC и $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$, *то AD содержит симедиану.*

4. Основная задача

Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть касательные к окружности, проведенные в точках B и C, пересекаются в точке P. Тогда прямая AP содержит симедиану треугольника ABC.

Симедиана. Для самостоятельного решения.

Свойства.

1. Луч, содержащий ***симедиану*** – г.м.т. S, лежащих внутри угла BAC таких, что:

А) расстояния от вершин B и C до прямой AS пропорциональны квадратам сторон AB и AC.

Б) $\frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{AB^2}{AC^2}$. В) расстояния до сторон AB и AC пропорциональны этим сторонам.

2. Дан треугольник ABC и точка X внутри него так, что $\angle BAX = \angle ACX, \angle CAX = \angle ABX$.

Докажите, что, AX содержит ***симедиану*** треугольника ABC.

3. Пусть симедиана AS пересекает окружность, описанную около треугольника ABC в точке D. Докажите, что: А) биссектрисы углов A и D пересекаются на стороне BC. Б) $AB \cdot DC = AC \cdot DB$ (такой вписанный четырехугольник называется ***гармоническим***) В) Четырехугольник – ***гармонический*** т. и т. т., когда его диагонали являются ***симедианами***. Г) точка D лежит на окружности ***Аполлония*** треугольника ABC.

Задачи.

1. А) Докажите, что в неравнобедренном треугольнике одна из симедиан совпадает с высотой т. и т. т., когда этот треугольник – прямоугольный.

Б) Докажите, что высота прямоугольного треугольника делит гипотенузу в отношении квадратов катетов.

2. *(Московская математическая олимпиада 2008)* Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка B_0 – середина стороны AC . Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой A_1C_1.

3. *(Всероссийская олимпиада по математике 1995, 4 этап)* В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность S , пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности S в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения P лежит на прямой, содержащей медиану треугольника ABC, проведённую из вершины B.

4. Две окружности пересекаются в точках M и K. Из точки A одной окружности проводятся лучи AM и AK, пересекающие вторую окружность в точках B и C соответственно. Докажите, что все медианы треугольника ABC, проведенные из вершины A, пересекаются в одной точке.

5. *(Всероссийская олимпиада по геометрии 2012)* Дан треугольник ABC. Касательная в точке C к его описанной окружности пересекает прямую AB в точке D. Касательные к описанной окружности треугольника ACD в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что прямая DK делит отрезок BC пополам.

6. (*теорема о симметричной бабочке)* На диаметре KW окружности взята точка M. Лучи MA и MD таковы, что $\angle KMA = \angle WMD < 90°$ (A и D – точки пересечения этих лучей с окружностью лежат в одной полуплоскости относительно прямой KW). Докажите, что все прямые AD, построенные описанным образом, пересекают прямую KW в одной и той же точке P.

7. *(Всероссийская олимпиада по геометрии 2013)* В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Из точки H провели перпендикуляры к прямым B_1C_1 и A_1C_1, которые пересекли лучи CA и CB в точках P и Q соответственно. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки C на прямую A_1B_1, проходит через середину отрезка PQ.

8. *(Всероссийская олимпиада по математике 2009)* В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC , в точках B и E . Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

9. А) *(Московская математическая олимпиада 2007)* Точки A', B' и C' — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно, а BH — его высота. Докажите, что если описанные около треугольников AHC' и CHA' окружности проходят через точку M, отличную от H, то $\angle ABM = \angle CBB'$.

Б) *(Московская устная олимпиада по геометрии 2009)* К двум окружностям w_1 и w_2, пересекающимся в точках A и B, проведена их общая касательная CD (C и D — точки касания соответственно, точка B ближе к прямой CD, чем A). Прямая, проходящая через A, вторично пересекает w_1 и w_2 в точках K и L соответственно (A лежит между K и L). Прямые KC и LD пересекаются в точке P. Докажите, что PB – симедиана треугольника KPL.