Середины дуг.

0. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке; A_1, B_1, C_1 и D_1 – середины дуг AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что $A_1C_1 \perp B_1D_1$.

1. На окружности взяты точки A, C_1, B, A_1, C, B_1 в указанном порядке.
А) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются биссектрисами углов треугольника ABC, то они являются высотами треугольника $A_1B_1C_1$.
Б) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются высотами треугольника ABC, то они являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.
В) Постройте треугольник ABC, зная три точки A_1, B_1 и C_1, в которых продолжения его биссектрис (высот) пересекают описанную окружность.

2. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке. M – середина дуги AB. Обозначим точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB через E и F. Докажите, что $FECD$ – вписанный четырёхугольник.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Окружность Ω, описанная около треугольника ABC, пересекает прямую A_1C_1 в точках A' и C'. Касательные к Ω, проведённые в точках A' и C', пересекаются в точке B'. Докажите, что прямая BB' проходит через центр окружности Ω.

4. А) Докажите, что прямая, соединяющая середины дуг AB и AC, где A, B, и C – три точки одной окружности, отсекает на хордах AB и AC равные отрезки, считая от точки A.
Б) Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Пусть точки M и N – середины дуг CD и AB. Докажите, что прямая MN параллельна биссектрисе угла AEB.

5. А) Отрезок, соединяющий середины дуг AB и AC окружности, описанной около треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках K и L. Докажите, что точки A, K, L и центр I вписанной окружности треугольника ABC являются вершинами ромба.
Б) В окружность вписаны треугольники T_1 и T_2, причем вершины треугольника T_2 являются серединами дуг, на которые окружность разбивается вершинами треугольника T_1. Докажите, что в шестиугольнике, являющемся пересечением треугольников T_1 и T_2, диагонали, соединяющие противоположные вершины, параллельны сторонам треугольника T_1 и пересекаются в одной точке.

6. А) Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Пусть O_1 – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а O_2 – центр окружности, вписанной в треугольник ABD. Докажите, что прямая O_1O_2 отсекает от треугольника AEB равнобедренный треугольник.
Б) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники ABD, ABC, BCD и ACD, являются вершинами прямоугольника.

7. А) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Биссектриса угла A пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке A_2. Точки B_2 и C_2 определяются аналогично. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.

Б) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 – середины дуг BAC, CBA, ACB описанной около треугольника ABC окружности. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.

8. А) Треугольник ABC вписан в окружность S . Пусть A_0 – середина дуги BC окружности S, не содержащей точку A, C_0 – середина дуги окружности S, не содержащей точку C. Окружность S_1 с центром A_0 касается BC , окружность S_2 с центром C_0 касается AB. Докажите, что центр I вписанной в треугольник ABC окружности лежит на одной из общих внешних касательных к окружностям S_1 и S_2 .
Б) Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB , BC и AC в точках K , L и M соответственно. К окружностям, вписанным в треугольники BKL , CLM и AKM проведены попарно общие внешние касательные, отличные от сторон треугольника ABC . Докажите, что эти касательные пересекаются в одной точке.
В) Окружность, вписанная в четырёхугольник $ABCD$, касается его сторон DA, AB, BC и CD в точках K , L , M и N соответственно. Пусть S_1 , S_2 , S_3 и S_4 – окружности, вписанные в треугольники AKL , BLM , CMN и DNK соответственно. К окружностям S_1 и S_2 , S_2 и S_3 , S_3 и S_4 , S_4 и S_1 проведены общие касательные, отличные от сторон четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник, образованный этими четырьмя касательными, – ромб.

9. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность w ($AD \parallel BC$). Окружности, вписанные в треугольники ABC и ABD, касаются оснований трапеции BC и AD в точках P и Q соответственно. Точки X и Y – середины дуг BC и AD окружности w, не содержащих точек A и B соответственно. Докажите, что прямые XP и YQ пересекаются на окружности w.