Важная лемма и замечательные точки четырехугольника.

1. А) Дан вписанный четырехугольник *ABCD*. Пусть H_C – ортоцентр треугольника *ABD*, H_B – ортоцентр треугольника *ACD*. Докажите, что $BC = H_B H_C$.

Б) Аналогично определим точки H_A и H_D. Докажите, что прямые AH_A, BH_B, CH_C, DH_D пересекаются в одной точке. *Эта точка H называется ортоцентром четырехугольника.*

2. (*теорема Монжа*) А) Докажите, что перпендикуляры, проведенные из середин сторон к противолежащим сторонам вписанного четырехугольника пересекаются в одной точке.

Б) Докажите, что *H* – точка из пункта а).

3. А) Пусть *K*, *L*, *M*, *N*, *E*, *F* – середины отрезков *AB*, *BC*, *CD*, *AD*, *AC* и *BD* соответственно. Тогда отрезки *KM*, *LN*, *EF* пересекаются в одной точке. *Эта точка G называется центроидом четырехугольника.*

Б) (*прямая Эйлера вписанного четырехугольника*) Центроид *G*, центр описанной окружности *O* и ортоцентр *H* вписанного четырехугольника лежат на одной прямой.

4. (*Окружность Эйлера вписанного четырехугольника*).

А) Докажите, что центры окружностей девяти точек треугольников *ABC*, *BCD*, *CDA*, *DAB* лежат на одной окружности.

Б) Докажите, что окружности девяти точек треугольников *ABC*, *BCD*, *CDA*, *DAB* пересекаются в одной точке.

В) Эта точка – ортоцентр четырехугольника.

Г) Докажите, что пункт Б) верен для произвольного четырехугольника.

Полученную точку называют точкой Понселе.

5. Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность с центром *O**. Пусть *H* – точка пересечения $H_A H_C$ и $H_B H_D$, *M* – точка пересечения отрезков, соединяющих центроиды треугольников, имеющих общую диагональ**. Тогда точки *H*, *M* и *O* лежат на одной прямой, причем $HM : MO = 2:1$.

**утверждение справедливо и в случае произвольного четырехугольника, если точку O определить как в задаче 6.*

***то есть центр тяжести четырехугольника, как однородной пластины.*

6. Пусть *P* – точка пересечения диагоналей четырехугольника *ABCD*, *G* – центроид, *O* – точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям, *H* – точка пересечения прямых, соединяющих ортоцентры треугольников *APD* и *BPC*, *APB* и *CPD*. Докажите, что *G* – середина *OH*.

7. Дан остроугольный треугольник *ABC* и точка *P*, не совпадающая с его ортоцентром и не лежащая на его описанной окружности. Докажите, что окружности девяти точек для треугольников *PAB*, *PAC*, *PBC* и *ABC*, а также окружность, проходящая через проекции точки *P* на стороны треугольника *ABC*, пересекаются в одной точке.