Ортоцентр и угол 60°.

Обозначения.

О – *центр описанной окружности, R – ее радиус, H – ортоцентр, I – центр вписанной окружности, I_b — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC.*

1. В треугольнике *ABC* $\angle ABC = 60°$. А) Докажите, что точки *A*, *O*, *I*, *H* и *C* лежат на одной окружности.

Б) Докажите, что центр этой окружности – середина дуги *AC*.

2. А) Докажите, что $BH = R$ тогда и только тогда, когда $\angle B = 60°$ или 120°.

Б) Докажите, что в первом случае точки *O* и *H* симметричны относительно биссектрисы внутреннего угла *B* треугольника, а во втором – внешнего.

3. В треугольнике *ABC* $\angle B = 60°$. Докажите, что $IO = IH$ и $I_bO = I_bH$.

4. В треугольнике *ABC* $\angle B = 60°$. Докажите, что прямая Эйлера отсекает от *ABC* равносторонний треугольник.

5. А) В остроугольном треугольнике *ABC* $\angle B = 60°$, высоты *CE* и *AD* пересекаются в точке *H*. Докажите, что *O* лежит на общей биссектрисе углов *AHE* и *CHD* .

Б) В остроугольном треугольнике *ABC* $\angle B = 60°$. Пусть *M* и *N* — точки пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам *AH* и *CH* со сторонами *AB* и *BC* соответственно. Докажите, что точки *M*, *N, O* и *H* лежат на одной прямой.

6. В треугольнике *ABC* $\angle B = 60°$, *BM* – медиана, *L* – середина *OB*. Докажите, что $LM \perp OH$.

7. Восстановите треугольник *ABC* по двум точкам: *H* и *I*, если известно, что $\angle B = 60°$, а радиус описанной окружности равен *R*.

8. В треугольнике *ABC* $\angle B = 60°$. Окружности, описанные вокруг треугольников *AHB* и *CHB*, пересекают прямые *BC*, *AB* в точках A_1 и C_1 соответственно. Докажите, что точки A_1, C_1 и *H* лежат на одной прямой.

9. В треугольнике *ABC*: $\angle B = 60°$, *BL* – биссектриса. Описанная окружность треугольника *BOL* пересекает описанную окружность треугольника *ABC* вторично в точке *D*. Докажите, что $BD \perp AC$.

10. В треугольнике *ABC*: $\angle B = 60^\circ, \angle A = 45^\circ$, *M* – середина *BC*. Докажите, что прямая *MH* проходит через середину дуги *AC*.

11. А) Прямая Эйлера треугольника параллельна одной из его биссектрис. Докажите, что один из его углов равен 120°.

Б) В треугольнике *ABC* $\angle B = 120°$. Докажите, что $OH = AB + BC$.

В) *T* – точка Торричелли *ABC*.

1) прямая Эйлера треугольника *ATC* параллельна прямой *BT*;

2) прямые Эйлера треугольников *ATC*, *BTC*, *ATB*, *ABC* конкурентны.