Окружность Аполлония.

1. Докажите, что прямая O_1A (где O_1 – центр окружности Аполлония для точек B и C) касается окружности, описанной около ABC.

2. Пусть S – окружность Аполлония для точек A и B, причем точка A лежит вне окружности S. Из точки A проведены касательные AP и AQ к окружности S. Докажите, что B – середина отрезка PQ.

3. А) Постройте треугольник ABC по стороне, проведенной к ней высоте и отношению двух других сторон.

Б) Постройте треугольник по его биссектрисе и отрезкам, на которые она делит сторону треугольника.

В) Постройте треугольник по углу и двум отрезкам, на которые биссектриса этого угла разбивает противолежащую сторону треугольника.

Г) Восстановите ABC по точкам B, C, основанию L биссектрисы угла A и основанию H высоты, проведенной к BC.

Д) На стороне прямого угла N даны две точки A и B. Найдите на другой стороне угла такую точку C, чтобы $\angle ACB = 2\angle BCN$.

4. А) На прямой даны четыре точки A, B, C, D в указанном порядке. Постройте такую точку X, из которой отрезки AB, BC и CD видны под равными углами.

Б) Три точки A, B и C расположены на одной прямой (B – между A и C). Возьмем произвольную окружность с центром B и обозначим через M точку пересечения касательных, проведенных из A и C к этой окружности. Найти геометрическое место точек M.

5. Треугольник ABC вписан в окружность. Постройте на окружности такую точку D, чтобы выполнялось равенство: $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.

6. Точки A и B лежат на диаметре данной окружности. Проведите через них две равные хорды с общим концом.

7. В треугольнике ABC дан центр вписанного круга I. При помощи одной линейки постройте отрезок, равный диаметру одной из окружностей Аполлония.

8. На плоскости даны два непересекающихся круга с центрами O и O_1. Из точки M плоскости проводятся касательные MA и MB к первому кругу и MA_1 и MB_1 ко второму кругу. Найдите г.м.т. M таких, что $\angle AMB = \angle A_1MB_1$.

9. *(Всероссийская олимпиада по геометрии, 2009)* В треугольнике ABC отметили центр вписанной окружности, основание высоты, опущенной на сторону AB, и центр вневписанной окружности, касающейся этой стороны и продолжений двух других. После этого сам треугольник стерли. Восстановите его.

10. *(Всероссийская олимпиада по геометрии, 2011)* Восстановите равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) по точкам I, M, H пересечения биссектрис, медиан и высот соответственно.

11. *(Всероссийская олимпиада по математике, 2008)* Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть P и Q – точки пересечения лучей BA и CD , BC и AD соответственно, а H – проекция D на PQ . Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда вписанные окружности треугольников ADP и CDQ видны из точки H под равными углами.