Общие касательные к двум окружностям.

0. А) В угол вписаны две окружности; у них есть общая внутренняя касательная T_1T_2 (T_1 и T_2 – точки касания), которая пересекает стороны угла в точках A_1 и A_2. Докажите, что $A_1T_1 = A_2T_2$.
Б) Докажите, что отрезок общей внешней касательной к двум окружностям, заключённый между общими внутренними касательными, равен отрезку общей внутренней касательной.
В) Докажите, что точки пересечения общих внешних касательных с общими внутренними касательными лежат на одной окружности. Где лежит центр такой окружности?
Г) Докажите, что если существует окружность, касающаяся всех сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$, и окружность, касающаяся продолжений всех его сторон, то диагонали такого четырёхугольника взаимно перпендикулярны.
1. Постройте треугольник по острому углу, высоте, проведенной к противолежащей стороне и периметру.
2. Постройте треугольник по стороне, радиусу вписанной окружности и радиусу вневписанной окружности, касающейся этой стороны.
3. Какое наибольшее количество окружностей, касающихся прямых, содержащих стороны может иметь n-угольник, если $n \geq 4$ (ответ может зависеть от n)?
4. Внутри угла AOD проведены лучи OB и OC, причём $\angle AOB = \angle COD$. В углы AOB и COD вписаны непересекающиеся окружности. Докажите, что точка пересечения общих внутренних касательных к этим окружностям лежит на биссектрисе угла AOD.
5. Общая внутренняя касательная к окружностям с радиусами R и r пересекает их общие внешние касательные в точках A и B и касается одной из окружностей в точке C. Докажите, что $AC \cdot CB = R \cdot r$.
6. Два колеса радиусов r и R катаются по прямой m. Найдите геометрическое место точек пересечения M их общих внутренних касательных.
7. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведены три общие касательные – две внешние, a и b, и одна внутренняя, c. Прямые a, b и c касаются окружности ω_1 в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно, а окружности ω_2 – в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равно отношению радиусов окружностей ω_1 и ω_2.
8. В треугольнике ABC на стороне AB отметили точку D. Пусть ω_1 и Ω_1, ω_2 и Ω_2 – соответственно вписанные и вневписанные (касающиеся AB во внутренней точке) окружности треугольников ACD и BCD. Докажите, что общие внешние касательные к ω_1 и ω_2, Ω_1 и Ω_2 пересекаются на прямой AB.
9. К двум окружностям провели общую внешнюю и общую внутреннюю касательную. Докажите, что прямая, соединяющая две точки касания на первой окружности и прямая, соединяющая две точки касания на второй окружности, пересекаются на линии центров под прямым углом.

Используйте радикальную ось или задачу 255.

10. В угол вписаны две окружности ω и Ω. Прямая l пересекает стороны угла в точках A и F, окружность ω в точках B и C, окружность Ω в точках D и E (порядок точек на прямой – A, B, C, D, E, F). Пусть $BC = DE$. Докажите, что $AB = EF$.
11. Три попарно непересекающиеся окружности ω_x, ω_y, ω_z радиусов r_x, r_y, r_z лежат по одну сторону от прямой t и касаются ее в точках X, Y, Z соответственно. Известно, что Y – середина отрезка XZ, $r_x = r_z = r$, а $r_y > r$. Пусть p – одна из общих внутренних касательных к окружностям ω_x и ω_y, а q – одна из общих внутренних касательных к окружностям ω_y и ω_z. В пересечении прямых p, q, t образовался неравнобедренный треугольник. Докажите, что радиус вписанной в него окружности равен r.
12. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC в точках K, L и M соответственно. К окружностям, вписанным в треугольники BKL, CLM и AKM проведены попарно общие внешние касательные, отличные от сторон треугольника ABC. Докажите, что эти касательные пересекаются в одной точке.