Точка Микеля.

1. Две равные окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках M и K. Через точку K проведены две прямые, пересекающие первую окружность в точках A и B, а вторую – в точках C и D соответственно. Докажите, что: а) $AB = CD$; б) треугольники AMC и BMD – равнобедренные; в) $\Delta ABM = \Delta CDM$; г) $\angle AMC = \angle BMD = \angle O_1MO_2$; д) M – центр поворота, переводящего один треугольник в другой (см.пункт в), а одну окружность – в другую.

е) Докажите, что если окружности не равные, то треугольники ABM и CDM подобны, причем M – центр поворотной гомотетии переводящей один треугольник в другой, а одну окружность – в другую.

2. Дан четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, AD и BC – в точке F. M – точка Микеля для данных четырех прямых. Докажите, что:

А) если $BE = DF$, то M — центр поворота, переводящего отрезок BE в FD;

Б) M – центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок BE в FD (или DE в FB)

В) Докажите, что в пункте А) M – середина дуги DE окружности, описанной около ΔADE.

3. Четырехугольник $ABCD$ – вписанный. Докажите, что точка Микеля для прямых, содержащих его стороны лежит на отрезке EF.

4. Даны четыре прямые. Докажите, что проекции точки Микеля на эти прямые лежат на одной прямой.

5. А) Докажите утверждение, обратное теореме о прямой Симсона.

Б) И обобщение:

Из точки P проведены прямые PA_1, PB_1 и PC_1 под данным (ориентированным) углом к прямым BC, CA и AB соответственно (точки A_1, B_1 и C_1 лежат на прямых BC, CA и AB). Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, тогда и только тогда, когда P лежит на описанной окружности треугольника ABC.

В) Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точка P – вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, ACP и точка P лежат на одной окружности.

Г) Четыре попарно пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности, проходящей через точку Микеля.

6. А) Две равные окружности пересекаются в точках A и B. Докажите, что прямая, соединяющая произвольную точку одной окружности с ее образом при повороте около точки A, отображающем эту окружность на другую, проходит через точку B.

Б) Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H; P – точка его описанной окружности. Докажите, что образы точки P при симметрии относительно сторон треугольника лежат на одной прямой, проходящей через его ортоцентр. (*прямая Штейнера*)

В) Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H; P – точка его описанной окружности. Докажите, что прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC делит отрезок PH пополам.

7. На стороне AB треугольника ABC выбирается точка E, а на луче BC (за точкой C) – точка F так, что $AE = CF$. Прямые AC и EF пересекаются в точке X. Рассмотрим треугольники AEX для всех пар E и F. Докажите, что их окружности имеют общую точку.

8. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, стороны BC и AD которого равны, но не параллельны. Пусть E и F – внутренние точки отрезков BC и AD соответственно такие, что $BE = DF$. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, прямые AC и EF пересекаются в точке Q, прямые BD и EF пересекаются в точке R. Рассмотрим треугольники PQR, получаемые для всех таких точек E и F. Докажите, что окружности, описанные около всех таких треугольников, имеют общую точку, отличную от P.