

Две пересекающиеся окружности

Пример. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Через точку A первой окружности проведены прямые AP и AQ , пересекающие вторую окружность в точках B и C . Докажите, что:

А) угол AQB не зависит от выбора точки A .

Б) касательная в точке A к первой окружности параллельна прямой BC .

Задачи.

1. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Через точку A первой окружности проведены прямые AP и AQ , пересекающие вторую окружность в точках B и C . Докажите, что длина отрезка BC не зависит от выбора точки A .
2. Две окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точках P и Q . Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B . Докажите, что треугольники AQB и O_1QO_2 подобны.
3. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B , а через точку Q – секущая, которая пересекает окружности в точках C и D соответственно. Докажите, что $AC \parallel BD$.
4. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена секущая, которая пересекает окружности в точках C и D . Через точки C и D проведены касательные к окружностям; они пересекаются в точке E . Докажите, что четырехугольник $BCED$ – вписанный.
5. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B . Найдите г.м.т. центров окружностей, описанных около треугольника AQB .
6. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B . Через произвольную точку X первой окружности проведена прямая XA , которая пересекает вторую окружность в точке Y и прямая XB , которая пересекает вторую окружность в точке Z . Докажите, что прямая YZ перпендикулярна диаметру первой окружности, проведенному через точку X .
7. Докажите, что: а) высоты; б) биссектрисы (для каждого случая в отдельности); в) *медианы* всех таких треугольников XYZ , проведенные из точки X пересекаются в одной точке.
8. Найдите положение точки X , при котором площадь треугольника XYZ – наибольшая.
9. Найдите г. м. т. центров окружностей, описанных около треугольников XYZ .
10. Пусть окружность, описанная около треугольника XYZ пересекает вторично первую окружность в точке P . Докажите, что угол XPO_2 – прямой.
11. Две равные окружности пересекаются в точках A и B . P – отличная от A и B точка одной из окружностей, X , Y – вторые точки пересечения прямых PA , PB с другой окружностью. Докажите, что прямая, проходящая через P и перпендикулярная AB , делит одну из дуг XY пополам.