Индукция

8 класс

25.04.15

1. Докажите тождества:

   а) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   б) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

   в) $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \ldots n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

2. Докажите, что квадрат $2^n \times 2^n$ без одной клетки при любом натуральном $n > 2$ можно разрезать на «уголки» из трех клеток.

3. Проведём в выпуклом многоугольнике некоторые диагонали так, что никакие две из них не пересекаются (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Доказать, что найдутся по крайней мере две вершины многоугольника, из которых не проведено ни одной диагонали.

4. На плоскости расположено несколько прямых и окружностей. Докажите, что части, на которые они разбивают плоскость, можно покрасить в два цвета так, что любые две части, имеющие общий участок границы, покрашены в разные цвета.

5. Докажите, что квадрат можно разрезать на n квадратов для любого n, начиная с шести.

6. Петя умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении $\frac{n}{n+1}$, где n – любое натуральное число. Петя утверждает, что этого достаточно, чтобы на любом отрезке отметить точку, которая делит его в любом заданном рациональном отношении. Прав ли он?

7. В компании из $2n + 1$ человека для любых n человек найдётся отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.

8. Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что каждый цвет присутствует и никакие две соседние вершины не окрашены в один цвет. Докажите, что многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники так, чтобы у каждого треугольника вершины были трех разных цветов.

9. На кольцевой автомобильной дороге стоят несколько одинаковых автомашин. Если бы весь бензин, имеющийся в этих автомашинах, слили в одну, то эта машина смогла бы проехать по всей кольцевой дороге и вернуться на прежнее место. Докажите, что хотя бы одна из этих машин может объехать всё кольцо, забирая по пути бензин у остальных машин.

10. Клетки шахматной доски 100×100 раскрашены в 4 цвета так, что в любом квадрате 2×2 все клетки разного цвета. Докажите, что угловые клетки раскрашены в разные цвета.