Многочлены с целыми коэффициентами

8 класс

18.04.15

1. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и целых чисел a и b число $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$.

2. Докажите, что не существует многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которого $P(-1) = 2$ и $P(1) = 1$.

3. Известно, что многочлен с целыми коэффициентами $P(x)$ принимает нечётные значения при $x = 1$ и $x = 0$. Докажите, что он не имеет целых корней.

4. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами таков, что $P(-1) = P(0) = P(1) = 0$. Докажите, что $P(k)$ делится на три при любом целом k.

5. Дан многочлен с целыми коэффициентами $P(x)$. Известно, что $P(1) = 1$ и $P(k) = 0$, где k — целое. Каким может быть k?

6. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, причём $P(2)$ делится на 5, а $P(5)$ делится на 2. Докажите, что $P(7)$ делится на 10.

7. Пусть k — целое число, а $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами. Известно, что $P(Q(k)) = Q(P(k))$. Докажите, что $P(P(k)) - Q(Q(k))$ делится на $P(k) - Q(k)$.

8. Найдите свободный член многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, если известно, что он по модулю меньше 1000 и $P(19) = P(94) = 1994$.

9. Дан многочлен с целыми коэффициентами $P(x)$. Докажите, что для любого натурального k существует такое натуральное число n, что $P(1) + P(2) + \ldots + P(n)$ делится на k.

10. Дан многочлен с целыми коэффициентами $P(x)$, свободный член которого отличен от нуля. Известно, что если НОД$(a, b) > 1$, то НОД$(P(a), P(b)) > 1$, где a и b — целые числа. Докажите, что все числа $P(1), P(2), \ldots, P(n), \ldots$ имеют общий делитель, отличный от 1.