Конструктивный разнобой

8 класс

04.04.15

1. На доске записаны числа $1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$. Разрешается стереть любые два числа и вместо них записать их разность – неотрицательное число. Может ли на доске в результате нескольких таких операций остаться только число 15?

2. Цифры трёхзначного числа A записали в обратном порядке и получили число B. Может ли число, равное сумме A и B, записываться только нечётными цифрами?

3. Существуют ли два таких четырехугольника, что стороны первого меньше соответствующих сторон второго, а соответствующие диагонали больше?

4. Существует ли арифметическая прогрессия из 2015 натуральных чисел, в которой количество чисел, делящихся на 8, меньше, чем количество чисел, делящихся на 9, а последнее, в свою очередь, меньше, чем количество чисел, делящихся на 10?

5. На доске написаны три правильные несократимые дроби, дающие в сумме единицу, причём их числители — различные натуральные числа. Оказалось, что если каждую из этих дробей 'перевернуть' (т. е. заменить на обратную), то сумма полученных дробей будет натуральным числом. Приведите пример таких дробей.

6. Найти такие 50 натуральных чисел, что ни одно из них не делится на другое, а произведение любых двух из них делится на любое из оставшихся чисел.

7. Семизначный код, состоящий из 7 различных цифр, назовем хорошим. Паролем сейфа является хороший код. Известно, что сейф откроется, если введен хороший код и на каком-нибудь месте цифра кода совпала с соответствующей цифрой пароля. Можно ли гарантированно открыть сейф быстрее, чем за 7 попыток?

8. На плоскости даны два равных многоугольника F и F'. Известно, что все вершины многоугольника F принадлежат F' (могут лежать внутри него или на границе). Верно ли, что все вершины этих многоугольников совпадают?

9. Точка O лежит внутри $n-$угольника $A_1, \ldots, A_n$ и соединена отрезками с вершинами. Стороны $n-$угольника нумеруются числами от 1 до n, разные стороны нумеруются разными числами. То же самое делается с отрезками $OA_1, \ldots, OA_n$. Можно ли все отрезки занумеровать так, чтобы сумма номеров сторон для всех треугольников $A_1OA_2, \ldots, A_nOA_1$ была бы одинакова при а) $n = 9$, б) $n = 10$.

10. Укажите такое шестизначное число N, состоящее из различных цифр, что числа $2N$, $3N$, $4N$, $5N$, $6N$ отличаются от него перестановкой цифр.