

Неравенства

8 класс

28.03.15

Очевидное неравенство: Если a и b — любые числа, то $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Действительно, $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$, а квадрат любого числа не меньше нуля.

В листочке переменные считаются положительными, если не сказано обратного.

1. а) Докажите неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

б) Докажите неравенство $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

в) Докажите неравенство $\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

2. Докажите неравенство $a^2 + 4ab + 8b^2 + 4b + 1 \geq 0$, где a и b — любые числа.

3. Докажите неравенство $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} \geq 6$.

4. Пусть a, b, c — любые числа. Докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$.

5. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ac)$.

6. Докажите неравенство $ab + bc + ac \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}$.

7. Докажите неравенство $\frac{a}{a^4 + b^2} + \frac{b}{b^4 + a^2} \leq \frac{1}{ab}$.

8. Докажите неравенство $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2}{x}$, где $x > 1$.

9. Докажите неравенство

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + a^2} \geq a + b + c.$$

10. Докажите неравенство:

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2.$$

11. Пусть a, b, c — положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$