Инвариант и полуинвариант. Часть 1.

8 класс

21.03.15

1. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 20$. За ход стираются два числа a и b и вместо них пишется число $a + b - 1$. Какое число может остаться на доске после 19 ходов?

2. На табло горит число 1001. Каждую секунду какие-то две соседние цифры одновременно либо увеличиваются на 1, либо уменьшаются на 1 (если могут). Может ли на табло загореться число 2015?

3. На льду лежат три шайбы, не лежащие на одной прямой. Хоккеист может пробросить одну из шайб между двумя другими. Может ли каждая из шайб вернуться в изначальное положение после 25 бросков?

4. В каждой клетке доски 2015×2015 стоит либо плюс, либо минус. За ход можно поменять все знаки в строке или столбце на противоположные. Докажите, что за некоторое количество ходов можно получить таблицу, в каждом столбце и в каждой строке которой плюсов больше половины.

5. За ход от многоугольника можно отрезать (по прямой) кусок, перевернуть и приклеить его обратно по линии разреза. Можно ли такими операциями из квадрата получить равносторонний треугольник?

6. В таблице $n \times n$ $(n > 2)$ изначально в чёрный цвет покрашена одна клетка, соседняя по стороне с угловой, остальные — в белый. За операцию разрешается перекрасить в противоположный цвет все клетки любого столбца или все клетки любой строки. Можно ли такими операциями закрасить всю доску чёрным,

   а) если n — чётное;

   б) если n — нечётное;

   в) если $n = 4$ и разрешается перекрашивать клетки любой диагонали в противоположный цвет (не обязательно главной)?