

# Разнойбой

8 класс

07.03.15

1. Из точки  $A$  вне окружности  $\omega$  проведены две касательные  $AB$ ,  $AC$  к  $\omega$  ( $B$ ,  $C$  — точки касания). Докажите, что точка пересечения биссектрис треугольника  $ABC$  лежит на окружности  $\omega$ .
2. На окружности записаны 12 чисел. Каждое из этих чисел равно модулю разности двух чисел, стоящих после него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1. Найти эти числа.
3. В стране 100 городов. Между любыми двумя городами либо ходят поезда, либо летают самолёты (ровно одно из двух). Докажите, что можно либо разобрать все поезда, либо все самолёты на металлолом, чтобы всё равно можно было бы пропутешествовать по всем городам страны.
4. В некоторой стране каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно добраться в любой другой.
5. Выпуклый шестиугольник  $ABCDEF$  вписан в окружность. Известно, что  $AB \parallel DE$ ,  $BC \parallel EF$ . Докажите, что  $CD \parallel FA$ .
6. Даны натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ . Докажите, что можно найти такое натуральное  $x$ , чтобы число  $x \cdot a$  было квадратом,  $x \cdot b$  — кубом,  $x \cdot c$  — пятой степенью, а  $x \cdot d$  — седьмой.
7. Каждый из 450 депутатов парламента дал пощёчину ровно одному своему коллеге. Докажите, что можно избрать парламентскую комиссию из 150 человек, среди членов которой никто никого не бил.
8. Существует ли 100 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 7 простых?
9. Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $P$  (радиусы окружностей различны). В точке  $A$  к окружности  $\omega_1$  проведена касательная, пересекающая (вторично)  $\omega_2$  в точке  $B$ . Через точку  $P$  проведена прямая, параллельная  $AB$ , пересекающая  $\omega_2$  в точке  $C$  и  $\omega_1$  в точке  $D$ . Докажите, что  $ABCD$  — параллелограмм.
10. Докажите, что для любого натурального  $n$  существуют попарно взаимно простые числа, большие единицы,  $k_1, k_2, \dots, k_n$  такие что  $k_1 k_2 \cdots k_n - 1$  является произведением двух подряд идущих натуральных чисел.