Принцип крайнего

8 класс

28.02.15

0. На шахматной доске стоят несколько ладей. Докажите, что некоторая ладья бьет не более двух других.

1. а) Можно ли записать числа $1, 2, \ldots, 99$ в строчку так, чтобы любые два соседних числа отличались не менее чем на 50?

   б) Можно ли записать числа $1, 2, \ldots, 100$ в строчку так, чтобы любые два соседних числа отличались не менее чем на 50?

2. Шахматная доска разбита на домино. Докажите, что какая-то пара домино образует квадрат 2×2.

3. На листке написано несколько натуральных чисел. Известно, что для любых двух найдется на листке число кратное им обоим. Докажите, что на листке есть число кратное всем.

4. Во каждой клетке бесконечной клетчатой плоскости расставлен крестик или нолики с выполнением следующего условия: у каждого крестика среди соседей больше крестиков, чем ноликов (соседними считаются все клетки, имеющие с рассматриваемой хотя бы одну общую точку). Докажите, что крестиков бесконечно много.

5. По кругу написано несколько чисел, причем каждое является средним арифметическим его соседей. Докажите, что все числа равны.

6. На каждой из 13 планет некоторой системы, расстояния между которыми попарно различны, находится астроном, наблюдающий ближайшую планету.

   а) Докажите, что найдутся две планеты, астрономы которых наблюдают друг друга.

   б) Докажите, что какую-нибудь планету никто не наблюдает.

7. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 = 3(z^2 + t^2)$ не имеет решений в натуральных числах.

8. Докажите, что любой выпуклый многоугольник площади 1 можно поместить в прямоугольник площади 2 (*Определение: Многоугольник называется* ***выпуклым****, если с любыми двумя точками этого многоугольника в нём также лежит отрезок, соединяющий эти точки*).

9. На прямой имеется $2n + 1$ отрезок. Любой отрезок пересекается по крайней мере с n другими. Докажите, что существует отрезок, пересекающийся со всеми остальными (будем считать, что отрезки пересекаются, если они имеют общую точку, отличную от концов отрезков).