Китайская теорема об остатках

8 класс

21.02.2015

1. Натуральные числа m_1 и m_2 взаимно просты, a_1 и a_2 — некоторые остатки при делении на m_1 и на m_2 соответственно. Докажите, что существует натуральное число n, такое что выполнены сравнения $n \equiv a_1 \pmod{m_1}$ и $n \equiv a_2 \pmod{m_2}$. Докажите также, что если существую два таких натуральных числа n и n', то они дают одинаковые остатки при делении на $m_1 \cdot m_2$.

2. (*Китайская теорема об остатках*) Натуральные числа $m_1, \ldots, m_k$ попарно взаимно просты, $a_1, \ldots, a_k$ — некоторые остатки при делении на $m_1, \ldots, m_k$ соответственно. Докажите, что существует натуральное число n, что выполнена система сравнений:

$$\begin{cases} n \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ n \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

   Докажите также, что любые два натуральных числа, удовлетворяющие этой системе сравнений, дают равные остатки при делении на $m_1 \cdot \ldots \cdot m_k$.

3. Генерал построил солдат в колонну по 4, но при этом солдат Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Какое минимальное число солдат могло быть у генерала?

4. Найдите минимальное натуральное число, такое что его половина является квадратом, треть — кубом, седьмая часть — седьмой степенью.

5. Докажите, что существует 1000000 последовательных натуральных чисел, каждое из которых делится на десятую степень некоторого натурального числа.

6. Докажите, что существует 1000000 последовательных натуральных чисел, никакое из которых не является точной степенью натурального числа.