# Вписанные углы. Часть 1.

*8 класс*

*31.01.15*

0. а) Пусть точки $A$, $B$ и $C$ расположены на окружности с центром $O$. Тогда угол $AOB$ называется *центральным*, а угол $ACB$ – *вписанным*. Пусть угол $\angle AOB = 2\alpha$. Докажите, что $\angle ACB = \alpha$ если $C$ и $O$ находятся по одну сторону от прямой $AB$, и $\angle ACB = 180^\circ - \alpha$ – если по разные.

   б) Отрезки $AC$ и $BD$ пересекаются в единственной точке, отличной от $A$,$B$,$C$,$D$. Докажите, что точки $A$, $B$, $C$, $D$ лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $\angle ABD = \angle ACD$.

   в) Докажите, что четырехугольник является вписанным в том и только в том случае, когда сумма его противоположных углов равна $180^\circ$ (четырёхугольник $ABCD$ – вписанный, если точки $A, B, C, D$ лежат на одной окружности).

1. Высоты $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$. Докажите, что

   а) четырехугольник $AB_1HC_1$ вписанный;

   б) $\angle BAH = \angle HB_1A_1$;

   в) $AA_1$ – биссектриса треугольника $A_1B_1C_1$.

2. Две окружности пересекаются в точках $M$ и $K$. Через $M$ и $K$ проведены прямые $AB$ и $CD$ соответственно, пересекающиеся первую окружность в точках $A$ и $C$, вторую в точках $B$ и $D$. Докажите, что $AC \parallel BD$.

3. а) Вершина $A$ остроугольного треугольника $ABC$ соединена отрезком с центром $O$ описанной окружности. Из вершины $A$ проведена высота $AA_1$. Докажите, что $\angle BAA_1 = \angle OAC$.

   б) Докажите, что *ортоцентр* (точка пересечения высот) $H$ треугольника $ABC$, отраженный относительно стороны $BC$, попадает в точку на описанной окружности треугольника $ABC$.

   в) Докажите, что ортоцентр $H$, отраженный относительно середины $BC$, попадает в точку на описанной окружности треугольника $ABC$, причем диаметрально противоположную $A$.

4. а) Прямая $l$ проходит через точку $A$, лежащей на окружности $\omega$ с центром в точке $O$. Докажите, что прямая $l$ является касательной к окружности $\omega$ тогда и только тогда, когда отрезок $OA$ перпендикулярен $l$ (прямая является касательной к окружности, если эта прямая и эта окружность имеют ровно одну общую точку).

   б) Прямая $l$ касается окружности $\omega$ в точке $A$. Точки $C$, $D$ на прямой $l$ и хорда $AB$ таковы, что угол $\angle BAC$ острый, а угол $\angle BAD$ тупой. Докажите, что угол $\angle BAC$ равен половине угловой величины меньшей дуги $AB$, а угол $\angle BAD$ – половине угловой величины большей дуги $AB$ (угловая величина дуги $AB$ равна соответствующему центральному углу $\angle AOB$, содержащим данную дугу).

5. Касательная в точке $A$ к описанной окружности треугольника $ABC$ пересекает прямую $BC$ в точке $E$. $AD$ – биссектриса треугольника $ABC$. Докажите, что $AE = ED$.

6. а) Из точки $A$, лежащей вне окружности, выходят лучи $AB$ и $AC$, пересекающие эту окружность. Докажите, что величина угла $BAC$ равна полуразности угловых величин дуг окружности, заключённых внутри этого угла.

   б) Хорды одной окружности $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $K$. Докажите, что $\angle AKC$ равен полусумме угловых величин дуг $AC$ и $BD$ (дуг, не содержащих других отмеченных точек).

7. На окружности даны точки $A, B, C, D$ в указанном порядке; $A_1, B_1, C_1, D_1$ – середины дуг $AB, BC, CD$ и $DA$ соответственно. Докажите, что $A_1C_1 \perp B_1D_1$.