

# Графы-2. Часть 1.

8 класс

24.01.15

**Определение.** *Деревом* называется связный граф без циклов. *Висячей* вершиной в графе называется вершина степени 1.

1. а) Докажите, что в любом дереве, число вершин которого больше 1, найдутся по крайней мере две висячие вершины.  
б) Докажите, что в любом дереве с  $n$  вершинами ровно  $n - 1$  ребро.

**Определение.** *Остовным деревом* графа называется *подграф*, содержащий все его вершины и являющийся деревом.

2. а) Докажите, что в любом связном графе существует остовное дерево.  
б) Докажите, что связный граф, у которого число рёбер на единицу меньше числа вершин, является деревом.  
в) Какое минимальное количество рёбер может иметь связный граф на  $n$  вершинах?
3. Докажите, что из любого связного графа можно убрать одну вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы граф остался связным.
4. Петя по одной разрезает ниточки, составляющие сетку от комаров размера  $n \times m$  ячеек. Какое наибольшее число разрезов он может сделать так, чтобы сетка не распалась?
5. Можно ли раскрасить рёбра куба в два цвета так, чтобы по ребрам каждого цвета можно было пройти из любой вершины в любую другую?
6. В прямоугольной таблице некоторые клетки отмечены: в них стоит звёздочка. Известно, что для любой отмеченной клетки число звёздочек в её столбце равно числу звёздочек в её строке. Докажите, что число строк таблицы, где есть хотя бы одна звёздочка, равно числу столбцов таблицы, где есть хотя бы одна звёздочка.